



UNIVERSITÄT  
DRESDEN

# Fakultät Informatik

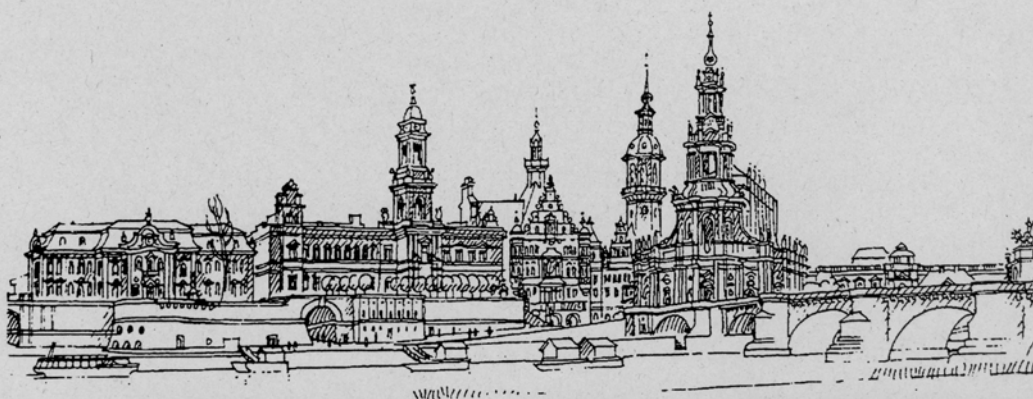
Technische Berichte  
Technical Reports

ISSN 1430-211X

TUD-FI08-01 Januar 2008

Rainer W. Schulze  
Institut für Technische Informatik

**Vektoranalytische Beschreibung  
eines diskret Massiven Systems**



Technische Universität Dresden  
Fakultät Informatik  
D-01062 Dresden  
Germany  
URL: <http://www.inf.tu-dresden.de/>

# Vektoranalytische Beschreibung eines diskret Massiven Systems

Rainer W. Schulze

Technische Universität Dresden

**Kurzfassung** — Diskret Massive Systeme stellen eine hypothetische Alternative zu konventionellen technischen Informationsverarbeitungssystemen dar. Sie sind geeignet, die innere Physik eines dynamischen Prozesses unmittelbar nachzubilden, gewissermaßen "in vitro". Dementsprechend durchschnittsfremd sind die Einzugsbereiche beider Systeme hinsichtlich ihrer Anwendung. In einem diskret Massiven System bewegen sich von Prozessor zu Prozessor *Verkehrsströme*, getrieben durch Referenzierungen zwischen den Prozessoren und zwangsgerichtet durch die Topologie des Verbindungsnetzwerkes zwischen den Prozessoren. Die Verarbeitungsleistung des Systems beruht auf der Überlagerung und Verdrängung von Verkehrsströmen.

Beschreiben lassen sich diskret Massive Systeme vektoranalytisch als Diffusionsprozess mit Hilfe einer Fokker-Planck-Gleichung. Eine solche Gleichung wird für ein  $n$ -dimensionales Raumkontinuum aufgestellt und deren Parameter *Diffusionskoeffizient* und *Beweglichkeitsvektor* in einen  $m$ -dimensionalen orthonormalen diskreten Raum überführt, dem Aktionsraum eines diskret Massiven Systems. *Verkehrsströme* eines diskret Massiven Systems werden durch *Korpuskelströme* entlang von *Flusslinien* in einem diskreten Aktionsraum nachgebildet. Die beschreibenden Parameter *Diffusionskoeffizient* und *Beweglichkeitsvektor* für *Korpuskelströme* lassen sich durch Zeitmessungen ermitteln.

**Schlüsselwörter** — Informationsverarbeitungssystem, Interprozessorkommunikation, Diffusion, Drift, Systemtheorie, stochastische Informationsverarbeitung, massiver Parallelismus

---

## 1 EINFÜHRUNG

Technische Informationsverarbeitungssysteme lassen sich typisieren nach der *Art der Informationsverarbeitung* (seriell oder parallel), nach der *Kommunikationsstrategie* (determiniert oder stochastisch) und nach der *Separierung oder Integration* von Informationsverarbeitung und -speicherung. Gegenwärtige Informationsverarbeitungssysteme zeichnen sich durch eine parallele Informationsverarbeitung und eine determinierte Kommunikationsstrategie aus; in ihnen besteht eine strikte Trennung zwischen den Ressourcen zur Informationsverarbeitung und denen zur Informationsspeicherung. Ein diskret Massives System wäre eine dazu hypothetische Alternative. Während in einem konventionellen technischen Informationsverarbeitungssystem zwischen den Prozessoren Daten ausgetauscht werden, üben in einem diskret Massiven System eine Vielzahl von Prozessoren Referenzierungen aufeinander aus. Träger der Referenzierungen sind Verkehrsströme. Auf deren Richtung und Mächtigkeit ist in einem diskret Massiven System die Informationsverarbeitung begründet. Die Verkehrsströme überlagern sich, verdrängen sich, vereinzeln sich usw. Demnach definiert sich ein diskret Massives System auch über ein anderes Architekturprinzip. Träger der Information ist nicht mehr die Struktur eines Datums, sondern die stochastisch orientierte Spur eines Korpuskelstroms. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Einzugsgebiete der gegenwärtigen Informationsverarbeitungssysteme und der diskret Massiven Systeme durchschnittsfremd.

Ein diskret Massives System eignet sich zur Nachbildung der inneren Physik dynamischer Prozesse "in vitro", das heißt, sie eignen sich zur Nachbildung dieser Prozesse so, wie sie sich tatsächlich ereignen. Repräsentatives Bei-

spiel ist die Nachbildung von Strömungsprozessen. Als Strömungsprozess wird die Änderung eines beweglichen Teilchens in Raum und Zeit entlang einer Flusslinie in einem flussfähigen Medium bezeichnet. Einerseits können derartige Prozesse durch ein System partieller Differentialgleichungen beschrieben und analysiert werden, andererseits kann der Verlauf der Flusslinien aber auch durch Referenzierungen zwischen den Prozessoren nachgebildet werden. Der Variation von Hindernissen im Strömungsprozess entsprechen Änderungen der Topologie des Verbindungsnetzwerkes zwischen den Prozessoren. In beiden Fällen wird ein Richtungszwang auf den Flusslinienverlauf ausgeübt, den es zu analysieren gilt. Bereits in [BEZ 83] wird auf ein stochastisches Lösungsverfahren, bezeichnet als *Irrfahrtmethode*, als eine zu analytischen Verfahren alternative Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen verwiesen. Weitere Ansätze enthalten [PT 02] [KR 95].

Ein nächstes Anwendungsgebiet für diskret Massive Systeme ist die Nachbildung geschlossener Erregerkreise [PG 97] [KR 95] in Neuronenpopulationen, zum Beispiel von Erregerkreisen im Hippocampus zur Untersuchung des Kurzzeitgedächtnisses. Derartige Erregerkreise unterliegen einer Reihe von Beeinflussungen sowohl durch das adaptive Verhalten der Neuronen als auch durch unterschiedliche Konzentrationen im extrazellulären Raum, deren Wechselwirkungen sich mit einem diskret Massiven System vorteilhaft untersuchen ließen.

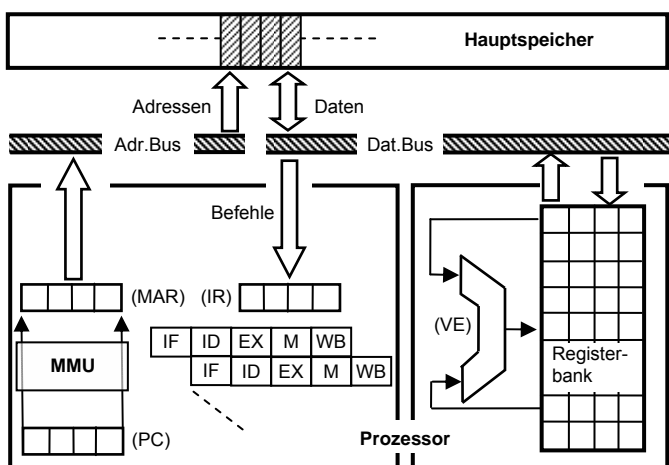
Nicht zuletzt eignen sich diskret Massive Systeme auch zur Erstellung von Bewegungs- und Belastungsprofilen in Verkehrsabläufen. Aus der Kenntnis lokalen Übergangsverhaltens einer Verkehrsbewegung innerhalb eines endli-

chen Zeitintervalls lässt sich mit Hilfe eines diskret Massiven Systems die globale Empfindlichkeit des Verkehrsraumes auf lokale Störungen prognostizieren. Diesbezügliche Aussagen würden die Steuerung von Verkehrsleitsystemen unterstützen, wären geeignet zur Prognose von Lastkonzentrationen, zur vorausseilenden Spureinweisung usw.

In einem diskret Massiven System ereignen sich von Prozessor zu Prozessor Verkehrsströme, getrieben durch Referenzierungen zwischen den Prozessoren und zwangsgerichtet durch die Topologie des Verbindungsnetzwerkes zwischen den Prozessoren. Und gerade darin ist die Verarbeitungsleistung eines diskret Massiven Systems begründet. Charakteristische Parameter des Systems sind der *Richtungszwang* auf den Verlauf der Verkehrsströme und die *Durchlässigkeit* der Topologie des Verkehrsfeldes dafür. Sowohl der Zusammenhang zwischen beiden Parametern als auch deren Ermittlung durch Zeitmessungen so genannter *Korpuskelströme* wird nachfolgend herausgestellt.

## 2. Serielle, Parallele und diskret Massive Systeme

Nach der Flynnschen Definition werden diskrete Rechnersysteme nach der Vielfachheit von Daten- und Befehlsflüssen, die den Rechnerkern (Fig. 2.1) durchsetzen, typisiert. Man unterscheidet formal zwischen *single* oder *multiple instruction streams* (SI/MI) in Verbindung mit *single* oder *multiple data streams* (SD/MD). Als *Daten* gelten sowohl *Operanden* als auch *Resultate*. Im Hinblick auf seriell und parallel strukturierte Rechnersysteme ist diese Typisierung als Unterscheidungsmerkmal geeignet, im Hinblick auf diskret Massive Systeme jedoch nicht mehr.



**Fig. 2.1** Seriell strukturierter Rechnerkern aus Hauptspeicher und Prozessor (MAR: Speicheradr.register, PC: Befehlszähler, IR: Befehlsregister, VE: Verarbeitungseinheit, MMU: Speicher-Verwaltungseinheit)

Die Abläufe innerhalb eines Prozessors lassen sich in Phasen einteilen, so zum Beispiel beim DLX-Prozessor mit *load store Architektur* [PH 05]. Einer *instruction fetch phase* folgt die *instruction decode phase*, der sich die *execution phase* zur Implementierung des Befehls anschließt. Speicherzugriffe erfolgen ausschließlich in der *memory phase* und das Rückschreiben der Resultate in die Registerbank des Prozessors in der abschließenden *write back phase*. Die *memory management unit* (MMU) überführt die virtuelle Adresse im *program counter* (PC) in eine physisch reale Hauptspeicheradresse, abgelegt im *memory address register*. Außerdem unterstützt die MMU die Segmentierung des *main memory* für das *multitasking*.

### 1.1 Seriell strukturierter Rechnerkern (SISD)

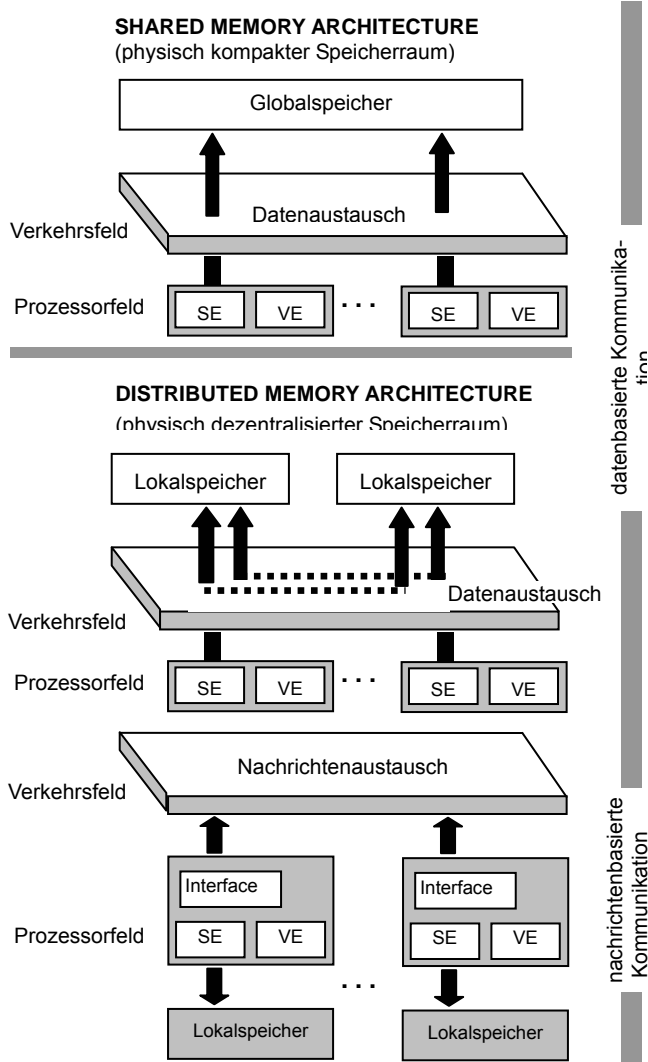
Die Geschwindigkeit des Prozessors lässt sich sehr wesentlich durch Befehlspipelining steigern. Pro Phase läuft ein Maschinenbefehl in das Befehlsregister des Prozessors ein, alle eingelaufenen Maschinenbefehle absolvieren im Zeitschatten zueinander ihre Phasenfolge. Die dabei entstehenden Hazards, untergliedert in Struktur-, Daten- und Steuerhazards, reduzieren den Befehlsdurchsatz und verlangen eine aufwendige Steuerung der Ressourceninanspruchnahme im Prozessor.

### 1.2 Parallel strukturierte Rechnersysteme S(M)IMD

Entsprechend der Flynnschen Definition fallen hierunter sowohl die SIMD-Systeme, unterteilt in Vektor- und Feldverarbeitungssysteme als auch die Multiprozessorsysteme MIMD. Prinzipiell arbeiten mehrer Prozessoren im Zeitschatten zueinander an einem Datensatz. Von Bedeutung ist die laufzeitaktuelle Verfügbarkeit der Daten aus diesen Sätzen. MIMD-Systeme können als Oberklasse der SIMD-Systeme (Fig. 1.2) angesehen werden. In einem Multiprozessorsystem können alle Datensätze voneinander verschieden sein und über unterschiedliche Befehle implementiert werden.

In einer *shared memory architecture* erfolgt der Datenaustausch zwischen den Prozessoren über einen *Globalspeicher*. Jedem Prozessor werden Zugriffsrechte auf ein und dieselbe Speicherzelle des Globalspeichers zugewiesen. Das Datum verbleibt generell in der Speicherzelle, lediglich die Zugriffsrechte auf die Speicherzelle werden vergeben (*arbitriert*). Von Nachteil ist, dass der physisch kompakte Speicherraum zur kritischen Systemressource wird, sein Ausfall bedingt den Ausfall des gesamten Systems.

In einer *distributed memory architecture* ist jedem Prozessor physisch dezentral ein *lokaler Speicher* zwecks Kommunikation zugeordnet. Über diesen erlangt jeder Prozessor Zugriff auf jeden anderen. Von Vorteil ist, daß der Ausfall eines Lokalspeichers nicht den Ausfall des gesamten Systems bedingt. Von Nachteil ist der erhöhte Steuerungsaufwand gegenüber dem erstgenannten Architekturprinzip.

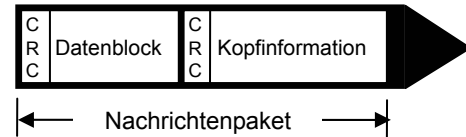


**Fig. 2.2** Ausführungsformen eines parallel strukturierten Rechnersystems vom Typ MIMD

Während sich die Unterscheidung der Kommunikationsarchitekturen in *shared* oder *distributed architectures* auf die physische Verteilung des Speicherraums bezieht, nimmt eine Unterscheidung der Kommunikationsarchitekturen in *datenbasierte* oder *nachrichtenbasierte* Kommunikation Bezug auf die Art des angesprochenen Adressraums als *Speicher-* oder *Interfaceadressraum*.

Im Falle einer *datenbasierten* Kommunikation greifen die Prozessoren auf einen *Speicheradressraum* zu, das Verkehrsfeld hat die Aufgabe, einen Datenstrom zu transferieren. Im Falle einer *nachrichtenbasierten* Kommunikation adressieren die Prozessoren nur einen *Interfaceadressraum*, aus dem ein Nachrichtenpaket gesendet bzw. in dem ein Nachrichtenpaket empfangen werden soll. Das Nachrichtenpaket selbst besteht aus einem Datenblock, ergänzt mit einer Kopfin-

formation, die zum Beispiel neben der Quell- und Zieladresse des Datenblocks auch ein CRC-Polynom zur softwaregestützten Fehlerkontrolle enthält. Aufgabe des Verkehrsfeldes ist der Transfer solcher Nachrichtenpakete (Fig. 2.3).



**Fig. 2.3** Struktur eines *Nachrichtenpakets* zur nachrichtenbasierten Kommunikation im Verkehrsfeld einer distributed memory architecture (*Nachrichtenarchitektur*)

Ausgetauscht werden *Daten* oder *Nachrichten* (*messages*) entweder über einen gemeinsamen Speicher (*shared memory*) oder über ein Verbindungsnetzwerk (*message passing*). Ein Verbindungsnetzwerk nimmt einen *Nachrichtenstrom* entgegen, transportiert diesen und übergibt ihn am Zielort dem Empfänger. Es entstehen Zugriffskonflikte, wenn mehrere Prozessoren um die Zugriffsberechtigung auf das Verkehrsfeld konkurrieren. Derartige Konflikte lassen sich unter anderem beseitigen durch [SC 03]

- Ausschluss (!) von Kommunikationsaktivitäten über das Verkehrsfeld
- Vervielfachung der Ressourcen im Verkehrsfeld.

**Durchsatzanalyse eines parallel strukturierte Rechnersystems:** Prinzipiell wird von einem Multiprozessorsystem als ein parallel strukturiertes Rechnersystem erwartet, dass proportional zur wachsenden Anzahl von Prozessoren auch dessen Rechenleistung (*speed up*) ansteigt. Diese Erwartung ist nicht zu erfüllen, weil mit wachsender Anzahl von Prozessoren auch der *Kommunikationsoverhead* zwischen ihnen zunimmt.

**Speed up:** In [EK 06] ist  $S$  die Implementierungsgeschwindigkeit der seriellen Fraktion  $f$  eines gegebenen Algorithmus und  $V$  die Implementierungsgeschwindigkeit der dazu komplementären Fraktion  $(1-f)$ , die parallel abgearbeitet wird. Bezogen auf eine Folge von  $N$  Gleitkommaoperationen resultiert nach dem Amdahl'schen Gesetz die Effizienz der Implementierung aus dem Verhältnis zwischen dem Zeitaufwand  $t_s = \frac{N}{S}$  für die serielle Abarbeitung dieser

Folge und dem Zeitaufwand  $t_p = \frac{N}{S}(1-f)$  für die parallele Abarbeitung der Fraktion  $f$  dieser Folge, bezeichnet als *speed-up*  $0 < E_A = \frac{1}{1-f} < \infty$ . Hingegen definiert der Ansatz von Gustafson [QU 04] einen *speed-up*  $E_G$  aus dem Verhält-



nis zwischen dem seriellen Zeitanteil  $t_s$  und dem verbleibenden parallelen Zeitanteil  $t_p$  zur Implementierung von  $N$  Gleitkommaoperationen zu  $1 < E_G = 1 + (N-1)g < N$  mit  $g = \frac{t_p}{t_s + t_p}$ , woraus  $E_A = (1 - E_G N^{-1})(E_G - 1)^{-1}$  folgt. Bei den Ansätzen liegt der zur Implementierung erforderliche Zeitbedarf zu Grunde. Offen bleibt die Frage nach dessen Ursache. In [BM 89] wurden zu ihrer Beantwortung der Begriff *Verlustklassen* eingeführt.

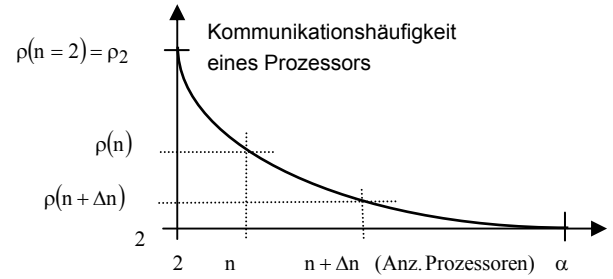
**Kommunikationsoverhead:** Angenommen ein Multiprozessorsystem aus  $n$  Prozessoren hat  $N$  Maschinenbefehle mit einem mittleren Befehlsholeabstand  $t_b$  zu implementieren. Insgesamt entsteht dabei eine Menge  $\alpha$  zu transferierender Daten. Deren Transfer ist vorzubereiten und durchzuführen. Sei  $c$  die Kommunikationsvorbereitungs- und  $q$  die Kommunikationsdurchführungszeit. Angenommen, der Datenbestand von  $\alpha$  Daten verteilt sich paritätisch auf alle  $n$  Prozessoren, dann ist  $\rho$  die Kommunikationshäufigkeit eines einzigen Prozessors bei gegebener Anzahl  $\alpha$  zu transferierender Daten. Diese Parameter nehmen Einfluss auf die Durchsatzzeit  $T_p(n, \alpha)$  zur Implementierung von  $N$  Befehlen in einem Multiprozessorsystem aus  $n$  Prozessoren.

$$T_p(n, \alpha) = \frac{Nt_b}{n} + cn\rho(n) + \alpha q \quad (2.1)$$

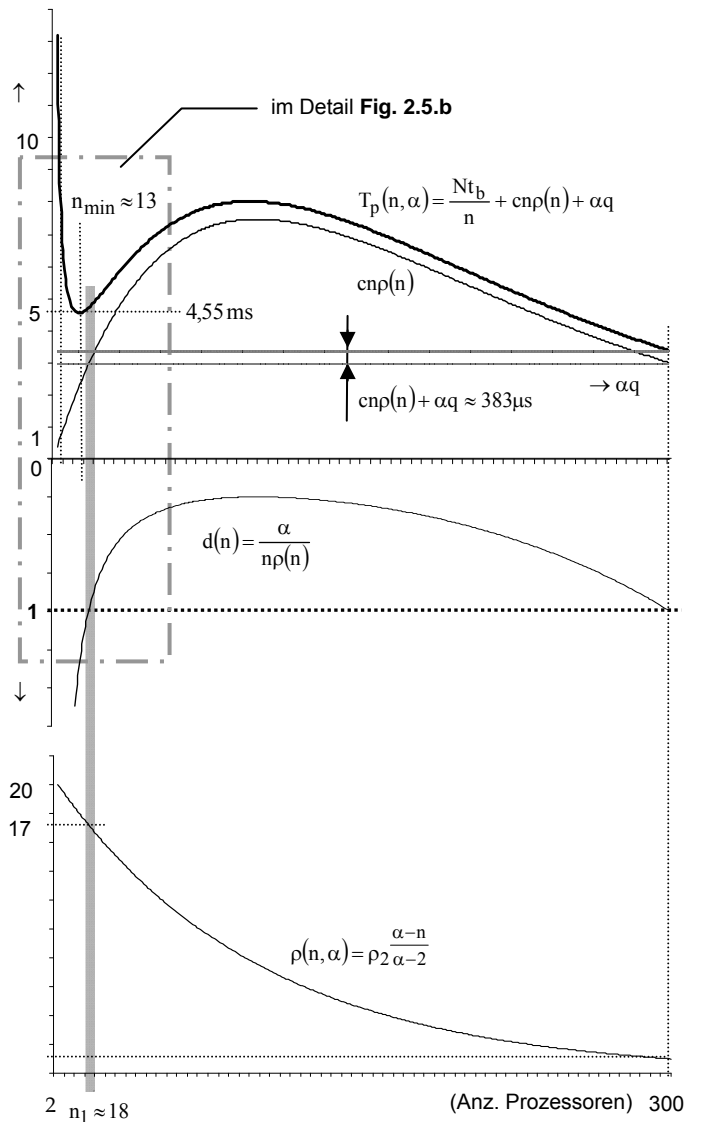
Plausibel sinkt die Kommunikationshäufigkeit  $\rho$  eines Prozessors mit wachsender Anzahl  $n$  von Prozessoren (Fig. 2.4). Mit den in Fig. 2.4 dargestellten Randbedingungen bezüglich der Kommunikationshäufigkeit  $\rho$  folgt unmittelbar  $\rho = \rho_2 \frac{\alpha-n}{\alpha-2}$  ( $\rho_2$ : Kommunikationshäufigkeit in einem 2-Prozessorsystem).

Es ist  $n_{\min} \approx \sqrt{\frac{Nt_b}{c\rho_2}}$  (grob näherungsweise) jene Zahl von Prozessoren, für die  $T(n_{\min}) \leq T(n)$  gilt. Grundsätzlich sind alle  $\alpha$  Daten zu transferieren. Bei gegebener Anzahl  $n$  von Prozessoren ist  $d(n) = \frac{\alpha}{n\rho(n)}$  die Vielfachheit der pro Kommunikationsphase transferierten Daten.

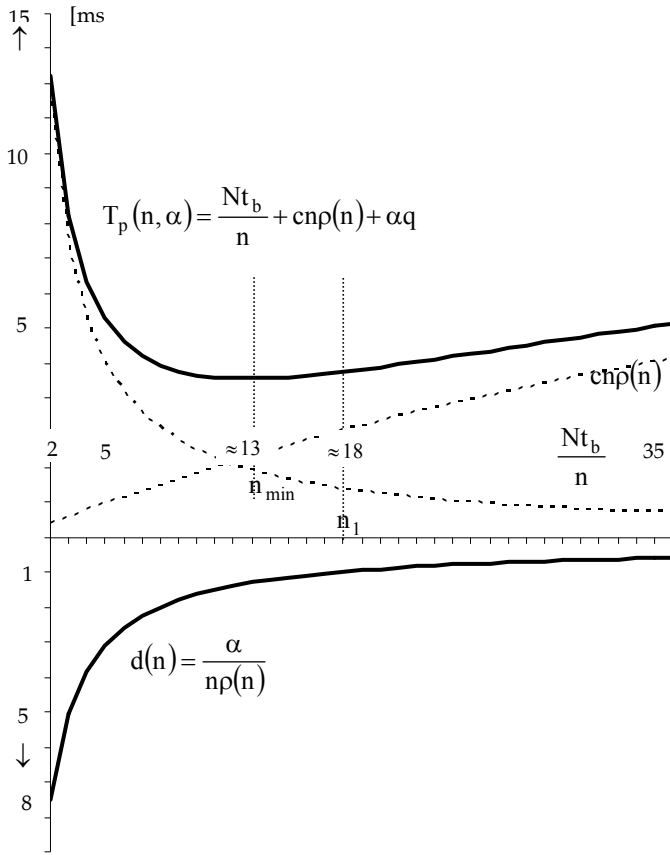
Fig. 2.5 zeigt für einen angenommenen Parametersatz  $(N, t_b, c, \alpha, q, \rho_2) = (500, 50, 10, 300, 1, 20)$  die dementsprechenden Werte  $n_{\min} \approx 13$  und  $n_1 \approx 18$ .



**Fig. 2.4** Verlauf der Kommunikationshäufigkeit  $\rho$  eines Prozessors in einem Multiprozessorsystem aus  $n$  Prozessoren



**Fig. 2.5.a** Durchsatzzeit  $T_p(n, \alpha)$  bei Implementierung von  $N$  Befehlen in einem MIMD-System aus  $n$  Prozessoren, Vielfachheit  $d(n)$  der pro Kommunikationsphase transferierten Daten und Referenzhäufigkeit  $\rho(n, \alpha)$  zwischen den Prozessoren



**Fig. 2.5b** Detaillierte Darstellung der Verläufe von  $T_p(n, \alpha)$  (: Durchsatzzeit) und  $d(n, \alpha)$  (: Anz. Kommunikationsphasen) in Fig. 4a im Bereich  $n = 2, \dots, 35$

Der Transfer von Binärwörtern in einem Multiprozessor-system aus  $n$  Prozessoren ist nicht nur *durchzuführen* sondern auch *vorbereiten*. Informationsträger eines Binärwortes ist dessen Struktur, seine Verarbeitung geschieht auf Grundlage einer determinierten Algebra. Unbedeutend dabei ist der Weg, den das Binärwort durch ein Verbindungs-netzwerk nimmt. Jedoch erlischt für  $n$  größer  $n_1$  diese Invarianz. Nicht mehr jeder vorbereiteten Kommunikationsphase folgt mindestens ein transferables Datum. Demzufolge kann als Informationsträger nicht mehr die Struktur eines Binärwortes in Betracht kommen. Informationsträger ist vielmehr der Weg, den eine Markierung durch ein Netzwerk nimmt. Ist dieser Weg stochastisch orientiert, könnte die Informationsverarbeitung auf Grundlage einer stochastischen Algebra erfolgen. Es ist erforderlich, die Wegenahme einer solchen Markierung sowohl zu beeinflussen als auch zu bewerten, nachfolgend erörtert am Beispiel der stochastischen Lösung einer partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0 \quad (\text{: Laplacesche Differentialgleichung})$$

mit  $u = u(x, y)$  für  $x, y \in \mathbf{R}$  in den Grenzen  $0 \leq x, y \leq \hat{X}, \hat{Y}$  innerhalb eines kontinuierlichen Integrationsgebietes  $B$ , d.h.  $(x, y) \in B$ . Speziell gelte für den Gebietsrand  $R_B$  von  $B$   $u(x, y) = f(x, y)$  (Randwert) [BGZ 82].

Die diskrete Berechnung von  $\Delta u$  erfordert eine Diskretisierung des Integrationsgebietes  $B \rightarrow B^*$  und die Überführung von  $\Delta u$  in eine äquivalente Differenzengleichung  $\Delta^* U$ . Sei formal  $B^*$  ein diskretes Gebiet mit  $(p, q) \in B^*$  als Koordinatenposition in  $B^*$  und  $P_{p,q}$  als zugeordneter Gebietspunkt unter  $p, q \in \mathbf{N}$  für  $0 \leq p, q \leq \hat{P}, \hat{Q}$ . Ist speziell  $x = p\Delta x$ ,  $y = p\Delta y$  unter  $0 \equiv x(y) \bmod \Delta x(y)$  ( $\Delta$ : Punktabstand) für  $p, q \in \mathbf{N}$ , dann gilt  $(x, y) \equiv (p, q)$  (: punktuelle Kongruenz) und  $B^*$  ist das dem kontinuierlichen Integrationsgebiet  $B$  zuzuordnende diskrete Integrationsgebiet, d.h.  $B \equiv B^*$  (: topologische Kongruenz). Charakterisiert ist  $B^*$  in jeder Richtung durch äquidistante Punktabstände  $\Delta$  zwischen unmittelbar benachbarten Gebietspunkten  $P$  in  $B^*$ , disjüngiert in  $R_{B^*}$  (: Gebietsrand von  $B^*$ ) und  $G^*$  (: von  $R_{B^*}$  eingeschlossenes Gebiet).

Anschaulich ist  $u(x, y)$  das aus  $\Delta u = 0$  bilanziertes Potential in  $(x, y) \in B$  und  $U_{p,q}$  entsprechendes Potentialäquivalent von  $P_{p,q}$  über  $B^*$  aus  $\Delta^* U = U_{p-1,q} + U_{p+1,q} + U_{p,q-1} + U_{p,q+1} - 4U_{p,q} = 0$ . Es ist  $\Delta^* U = 0$  eine zu  $\Delta u = 0$  äquivalente Differenzengleichung, d.h.  $\Delta u \equiv \Delta^* U$  (: algorithmische Kongruenz). Das Äquivalenzpotential  $U_{p,q}$  in  $P_{p,q}$  resultiert aus Randwerten und Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten, ermittelt aus beeinflussten und bewerteten Irrfahrten in  $B^*$  (Fig. 2.6). Es ist

- $\pi(P_{v'}, P_v) = \pi_{v',v}$  Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit von  $P_{v'}$  aus  $P_v$  in  $B^*$ ,
- speziell  $\pi_{\mu,v} = 0$  und  $\pi_{v,v} = 1$  für  $P_\mu, P_v \in R_{B^*}$ ,
- $\sum_{(P_\mu \in G^*)} \pi_{\mu,(p,q)} = 1$  für  $P_\mu \in R_{B^*}$   $P_{(p,q)} \in G^*$  und
- $\pi_{(p,q),(p \pm 1, q)} = \pi_{(p,q),(p, q \pm 1)} = \pi (= 0,25)$  Übergangswahrscheinlichkeit  $\forall (p \pm 1, q \pm 1) \in G^*$ .

Mit dem Ansatz:  $U_{p,q} = \sum_{(P_\mu \in R_{B^*})} F_\mu \pi_{\mu,(p,q)}$  (: Randwertinduziertes Potential von  $P_{p,q}$ ) mit  $F_\mu = U_{p',q'}$  für  $P_{p',q'} \in R_{B^*}$

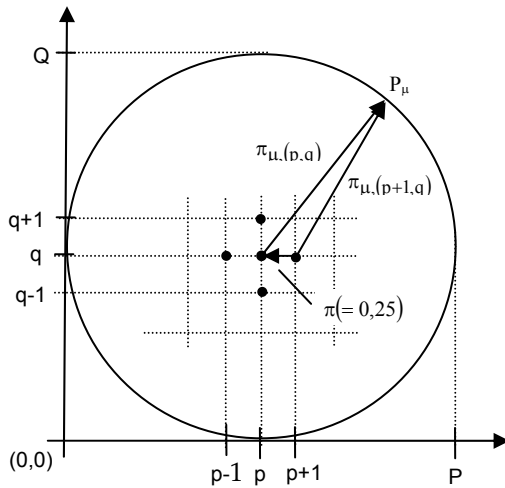
folgt aus der Substitution

$$\pi_{\mu,(p,q)} = \pi \left[ \pi_{\mu,(p+1,q)} + \pi_{\mu,(p-1,q)} + \pi_{\mu,(p,q+1)} + \pi_{\mu,(p,q-1)} \right]$$

unmittelbar

$$\begin{aligned} \sum_{(p_{\mu} \in R_{B^*})} F_{\mu} \pi_{\mu,(p,q)} &= \pi \sum_{(p_{\mu} \in R_{B^*})} F_{\mu} \pi_{\mu,(p+1,q)} + \\ &+ \pi \sum_{(p_{\mu} \in R_{B^*})} F_{\mu} \pi_{\mu,(p-1,q)} + \pi \sum_{(p_{\mu} \in R_{B^*})} F_{\mu} \pi_{\mu,(p,q+1)} + \\ &+ \pi \sum_{(p_{\mu} \in R_{B^*})} F_{\mu} \pi_{\mu,(p,q-1)} \end{aligned}$$

und daraus für  $\pi = 0,25$  schließlich  $\Delta^* U = 0$  als orts-diskrete Präsentation von  $\Delta U = 0$  über  $B^* \subseteq B$ .

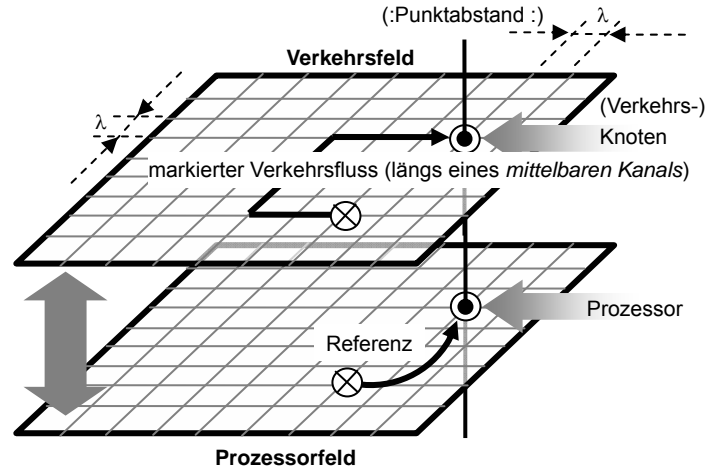


**Fig. 2.6** Übergangs- und Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten in  $B^*$

Die numerische Berechnung von  $\Delta u = 0$  setzt unabhängig vom verwendeten Verfahren die Diskretisierung des Integrationsgebietes  $B$  nach  $B^* \subseteq B$  voraus. Verfahrensunterschiede bestehen in der Implementierung von  $\Delta^* u = 0$ . Die Implementierung in einem *Multiprozessorsystem* kann erfolgen über die Rekursion des aus  $\Delta^* u = 0$  abgeleiteten Differenzensterns  $U_{p,q} = 0,25 [U_{p-1,q} + U_{p+1,q} + U_{p,q-1} + U_{p,q+1}]$  über alle  $(p,q) \in B^*$ . Hingegen kann die Implementierung in einem *diskret Massiven System* über die Wichtung von Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten  $\pi_{\mu,(p,q)}$  mit der Randwertbelegung  $F_{\mu} = U_{p',q'}$  längs  $R_{B^*}$  erfolgen, bezeichnet als randwertinduziertes Potential  $U_{p,q} = \sum_{(p_{\mu} \in R_{B^*})} F_{\mu} \pi_{\mu,(p,q)}$  über alle  $(p,q) \in B^*$ .

### 2.3 Architektur eines diskret Massiven Systems

Ein *diskret Massives System* (dMS) existiert formal als zweischichtige Anordnung aus Prozessor- und Verkehrsfeld. Beide Schichten stehen in Wechselwirkung zueinander und sind Komponenten der *Architektur des diskreten Aktionsraumes eines dMS*: Topologie des Verkehrsfeldes (Kanalstruktur) mit den darüber definierten Referenzierungen des Prozessorfeldes (Fig. 2.7).



**Fig. 2.7** *Diskret Massives System* als zweischichtige und zueinander in Wechselwirkung stehende Anordnung aus Prozessor- und Verkehrsfeld.

Über das Verkehrsfeld wird ein markierter Verkehrsfluss getrieben, dessen Orientierung sowohl durch die Topologie zwischen den Knoten als auch durch die Referenzverteilung zwischen den Prozessoren des Prozessorfeldes bestimmt ist.

Im übergeordneten Verkehrsfeld ist jedem Prozessor genau ein Verkehrsknoten zugeordnet. Über alle Knoten hinweg driftet ein markierter Verkehrsfluss, dessen Orientierung sowohl durch die Topologie des Verkehrsfeldes als auch durch die Referenzierungen des Prozessorfeldes bestimmt ist. Formal unterscheidet sich auf dieser Abstraktionsebene ein dMS nicht von einem System aus mehreren Prozessoren zur parallelen Informationsverarbeitung. Allerdings erschließen dMS ein darüber hinausgehendes Einsatzgebiet: *Direktimplementierung von Algorithmen*, charakterisiert durch die Übereinstimmung von System- und Algorithmenstruktur. Ein dMS ist in der Lage, einen physikalisch-technischen Prozess ursächlich nachzubilden. Bereits erwähntes Beispiel ist die Modellierung von Strömungsprozessen, unter anderem zur Ursachenfindung von Verwirbelungen. Ein dMS definiert sich nicht durch die Anzahl der in ihm enthaltenen Prozessoren, sondern durch die dezidierten Wechselwirkungen zwischen ihnen. Die Prozessoren sind nicht durch einen programmgesteuerten Datenaustausch charakterisiert, sondern durch die Verteilung ihrer Referenzdichten, was man (im übertragenen Sinne) auch als *logische Gra-*

vation bezeichnen könnte. Unter diesem Aspekt zeigt ein dMS gegenüber einem Mehrprozessorsystem eine Reihe von Besonderheiten:

1. Der lokalen Nachbarschaft von Prozessoren entspricht auch ihre logische Nachbarschaft, bestimmt durch den zu implementierenden Prozess.
2. Anzahl und lokale Dichte der Prozessoren erlauben eine quasikontinuierliche Zustandsbeschreibung des zu implementierenden Prozesses in einem Raum-Zeit-Kontinuum.
3. Das Verhalten eines einzelnen Prozessors ist ohne Signifikanz für das Verhalten des Gesamtsystems.

Somit unterscheidet sich die Architektur eines konventionellen Systems zur Informationsverarbeitung von der Architektur eines dMS (I). Informationsträger in einem dMS sind nicht mehr *Binärworte*, sondern sind die spezifisch orientierten Verkehrsströme. Derartige Ströme treffen längs ihres Verlaufs in den jeweiligen Verkehrsknoten auf die Verläufe anderer Ströme (Fig. 2.7). Den daraus resultierenden Informationsgehalt ermittelt der dem Verkehrsknoten zugeordnete Prozessor. In ihm werden immittierte Verkehrsströme hinsichtlich ihres Quell- und Zielortes, hinsichtlich ihrer temporären Richtung und hinsichtlich ihrer Zeitlage ausgewertet, der Prozessor weist der Emission von Verkehrsströmen eine Flussrichtung zu. Demnach transportiert jeder Verkehrsstrom eine Markierung, mit Hilfe derer sich die Richtungen aller Verkehrsströme in Raum und Zeit voneinander unterscheiden lassen. Es entfällt die Trennung zwischen Informationsverarbeitung und -speicherung.

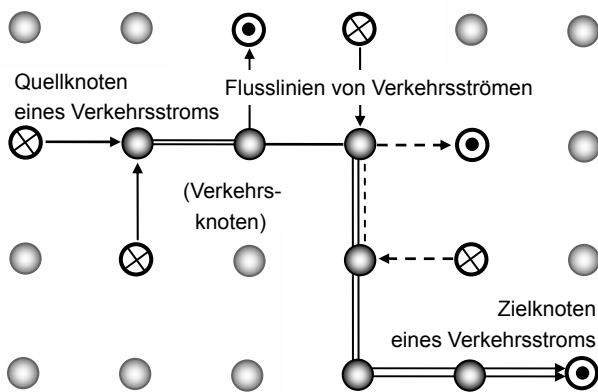


Fig. 2.8 Verlauf von Flusslinien unterschiedlicher Verkehrsströme

Anwendungsgebiete von dMS sind unter anderem

- Steuerung von Verkehrsflüssen durch ein Verkehrsleitsystem,
- Ausbreitung von Schadstoffen in einem diffusionsfähigen Medium,
- Analyse von Bewegungsprofilen in einem Spurverfolgungssystem,
- Ausbreitung von Epidemien nach der Feststellung von Infektionsherden und nicht zuletzt die
- Analyse sich verändernder Luft- und Wasserströmungen infolge stattfindenden Klimawandels.

Summa summarum handelt es sich sämtlich um Verteilungsprozesse, in denen sich die Orts- und Zeitlagen von Teilchen sowohl durch bestehende Konzentrationsunterschiede als auch durch Energieeinwirkungen von außen einander ausgleichen.

### 3. ELEMENTARER ABLAUF EINES ZEITINVARIANTEN UNGESTÖRTEN VERTEILUNGSPROZESSES

Angenommen, genau  $N$  Teilchen sind in einem abgeschlossenen System, bestehend aus  $m$  Verteilungsstellen, zu verteilen (Verteilungsprozess). Die Verteilung ereignet sich als sukzessive Überführung eines *Initialvektors*  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{m-1})$  durch eine *Übergangsmatrix*  ${}^{(0)}\mathfrak{Y}$  in einen gleichmächtigen

*Finalvektor*  $\mathfrak{z} = (z_0, \dots, z_{m-1})$ ,  $\sum_{i=0}^{m-1} x_i = \sum_{i=0}^{m-1} z_i = N$  (Fig. 3.1).

Sei unter  $\sum_{(i,j)} {}^{(0)}y_{i,j} = 1$  und  $0 < \sum_{(i,j)} \sigma({}^{(0)}y_{i,j}) < m^2$  mit

$\sigma(x > 0) = 1$  ( $0 = \text{sonst}$ ) (*Existenzbedingung*)  ${}^{(0)}\mathfrak{Y} = \| {}^{(0)}y_{i,j} \|_{m,m}$

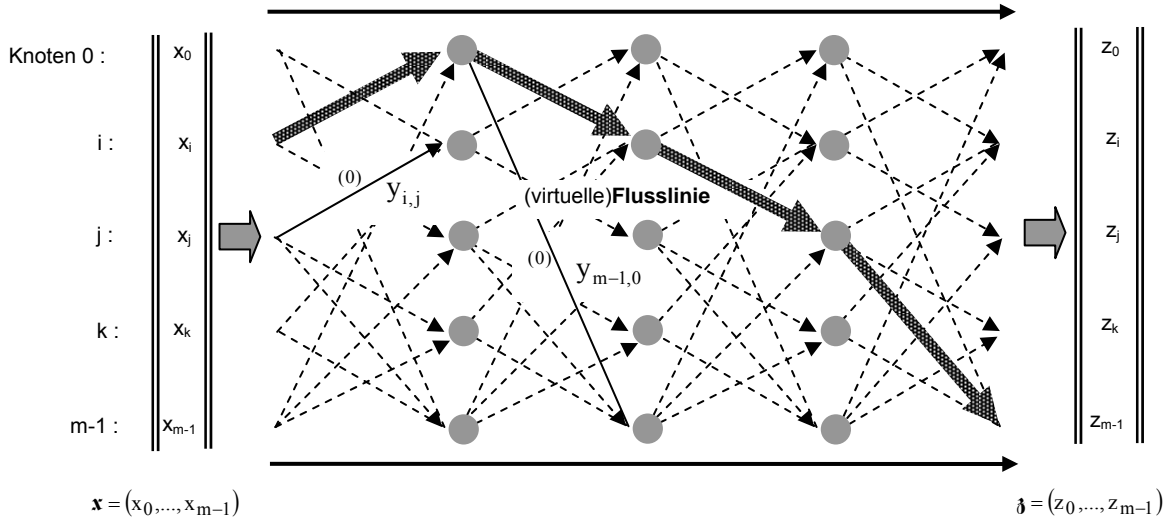
schwach besetzte  $m$ -dimensionale Matrix in Ereignislage 0, deren Elemente  ${}^{(0)}y$  *relative Übergangshäufigkeiten* genannt werden, so zum Beispiel  ${}^{(0)}y_{i,j}$  *relative Häufigkeit* eines

Übergangs von Verteilungsstelle (i) nach (j). Erreichbarkeit vorausgesetzt entwickelt sich durch die Aufeinanderfolge einer Vielzahl von Überführungen aus der *Übergangsmatrix*

${}^{(0)}\mathfrak{Y}$  die *Referenzmatrix*  $\mathfrak{Y} = \| y_{i,j} \|_{m,m}$ , deren Elemente  $y$  *relative Referenzhäufigkeiten* genannt werden. Speziell ist unter

$\sum_{(i,j)} y_{i,j} = 1$   $y_{i,j}$  *relative Referenzhäufigkeit* von (i) nach (j).





**Fig. 3.1** Sukzessive Überführung eines Initialvektors  $\mathbf{x}$  durch eine Übergangsmatrix  ${}^{(0)}\mathbf{Y}$  in einen Finalvektor  $\mathbf{z}$  (abstrakter Verteilungsprozess)

In Ereignislage  $[v]$  gilt  ${}^{[v]}\mathbf{y} = \frac{[v]\mathbf{p}}{[v]S}$  für  $v = 1, 2, \dots$  mit

${}^{(0)}\mathbf{y}^{[v-1]}\mathbf{p} = [v]\mathbf{p} = \|[v]p_{i,j}\|$  und  $[v]S = \sum_{(i,j)} [v]p_{i,j}$ , speziell

$[0]\mathbf{p} = {}^{(0)}\mathbf{y}$  und daraus schließlich

$$\lim_{v \rightarrow \infty} {}^{[v]}\mathbf{y} = \mathbf{y} \quad (3.1)$$

unter  $\sum_{(i,j)} y_{i,j} = 1$

Die Referenzmatrix  $\mathbf{y}$  transformiert (unnormiert) einen Initialvektor  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_i, \dots, x_{m-1})$  in einen Finalvektor  $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_i, \dots, z_{m-1})$ . Um einen gleichmächtigen Finalvektor zu erhalten, ist die Normierung des Finalvektors mit einem geeigneten Faktor (3.2) erforderlich.

Aus  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \vec{\delta}$  (: Hilfsvektor)

mit  $\vec{\delta} = (\delta_0, \dots, \delta_i, \dots, \delta_{m-1})$

folgt  $\frac{S}{s} \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z}$  (3.2)

mit  $S = \sum_{i=0}^{m-1} x_i$ ,  $s = \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i$

**Zum Beispiel** resultiert aus der Übergangsmatrix

$${}^{(0)}\mathbf{y} = 10^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,736 & 0 & 0 & 1,47 \\ 0,175 & 0 & 0,943 & 1,25 & 0 \\ 0 & 1,183 & 0 & 0 & 0,633 \\ 0 & 0 & 0,440 & 0 & 1,16 \\ 0,685 & 0 & 0,118 & 1,190 & 0 \end{pmatrix}_{5,5}, \quad (3.3.1)$$

welche die oben formulierte Existenzbedingung erfüllt, durch aufeinander folgende Überführungen schließlich die

Referenzmatrix

$$\mathbf{y} = 10^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,281 & 0,316 & 0,343 & 0,643 & 0,714 \\ 0,270 & 0,304 & 0,330 & 0,617 & 0,685 \\ 0,241 & 0,272 & 0,295 & 0,552 & 0,613 \\ 0,196 & 0,221 & 0,240 & 0,449 & 0,499 \\ 0,235 & 0,264 & 0,287 & 0,537 & 0,596 \end{pmatrix}_{5,5}, \quad (3.3.2)$$

welche die die Forderung  $\sum_{(i,j)} y_{i,j} = 1$  erfüllt.

Einen gegebenen Initialvektor  $\mathbf{x} = (144, 170, 167, 325, 194)^T$  transformiert die Referenzmatrix  $\mathbf{y}$  unter  $\frac{S}{s} \approx 4,6$  in einen gleichmächtigen Finalvektor  $\mathbf{z} = (230, 220, 197, 161, 192)^T$  (Fig. 3.1). Die Überführung  $\mathbf{y} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$  erfolgt längs (virtueller) Flusslinien (Fig. 2.8) von der Quelle (:Initialvektor  $\mathbf{x}$ ) zur Senke (:gleichmächtiger Finalvektors  $\mathbf{z}$ ). Die Referenzmatrix  $\mathbf{y}$  bestimmt die Entstehung des Finalvektors. Eine solche Annahme trifft auf ein dMS nicht zu!

Informationsträger in einem dMS sind spezifisch orientierte Korpustelströme entlang von physisch realen Flusslinien. In einem dMS existieren für Flusslinien weder Quellen noch Senken. Flusslinien verlaufen längs geschlossener Kreise und sind damit Ausdruck für einen sich selbst ver-

ursachenden Prozess. Verkehrsknoten emittieren und imittieren Korpuskelströme. Die Steuerung von Mächtigkeit und Richtung der Korpuskelströme geschieht nicht nur über die Referenzierungen zwischen den Prozessoren des Prozessorfeldes, sondern auch über die Topologie des Verkehrsfeldes. Da im dMS die *Informationsverarbeitung* sowohl auf der Mächtigkeit getriebener Ströme als auch auf der Durchdringung von Flusslinien beruht, ist es plausibel, den Einfluss der Topologie auf den Richtungszwang analysieren zu wollen.

Folgende Vorgehensweise besteht: Für einen  $n$ -dimensionalen kontinuierlichen Aktionsraum  $Z_0^n$  wird ein in Raum und Zeit kontinuierlicher Partikelfluss angenommen. Ein berechneter Parameter  $\mathbf{b}$  für den Richtungszwang auf den Partikelfluss im  $Z_0^n$  wird als Parameter  $\mathbf{b}^*$  in einen in Raum und Zeit diskreten Aktionsraum  $Z_\lambda^m$  projiziert. Entspricht der Korpuskelfluss im diskreten Aktionsraum dem Verkehrsfluss im dMS, dann ist der berechnete Parameter  $\mathbf{b}^*$  für den Richtungszwang im  $Z_\lambda^m$  geeignet zur dezidierten Beeinflussung von Richtungen realer Flusslinien für Verkehrsströme in einem dMS.

#### 4. Partikelfluss in einem kontinuierlichen Aktionsraum

Gegeben sei ein kontinuierliches, räumlich begrenztes Medium (*Kontinuum*), das infinitesimal kleine Masseteilchen (*Partikel*) in flüchtiger Ortslage mit unterschiedlicher Dichte einschließt. *Diffusion* bezeichnet einen durch lokale Dichteunterschiede getriebenen Ausgleichsprozess [CX 06] [HR 06] der endet, wenn das Kontinuum keine Dichteunterschiede mehr aufweist, *Drift* ist eine übergeordnete Partikelbewegung, die unter dem Einfluss eines Kraftfeldes stattfindet. Beide Prozesse ereignen sich als *Partikelfluss* kontinuierlich in Raum und Zeit, beschrieben durch die *Fokker-Planck-Gleichung* (FPG).

Beschrieben wird der Partikelfluss in einem  $n$ -dimensionalen kontinuierlichen Aktionsraum  $Z_0^n$  als ein von einer Hüllfläche  $A_V$  vollständig umgebenes Raumkontinuum mit dem Volumen  $V_A$ , das unendlich viele Raumpunkte  $P$  einschließt. Ist  $\mathbf{r}$  Ortsvektor von  $P$ , dann ist  $Z_0^n$  vollständig bestimmt durch die Ortslagen aller  $P$ .

$$Z_0^n = \left\{ P(\mathbf{r}_i) \mid 1 \leq i \leq m, \mathbf{r}_i = \sum_{v=1}^n i_{\zeta_v} \mathbf{e}_v, i_{\zeta_v} \in \mathbf{R}, 0 \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} i_{\zeta_v} \bmod \delta \right\}$$

( $\mathbf{R}$ : Menge reeller Zahlen) (4.1)

Alle Einheitsvektoren  $\mathbf{e}$  im  $Z_0^n$  stehen senkrecht aufeinander,

der,  $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$  für  $i \neq j$  (Orthogonalsystem).

Diffusion und Drift sind in Raum und Zeit stattfindende Prozesse. Sei  $t$  Variable im (endlichen) Zeitkontinuums  $T_0$ .

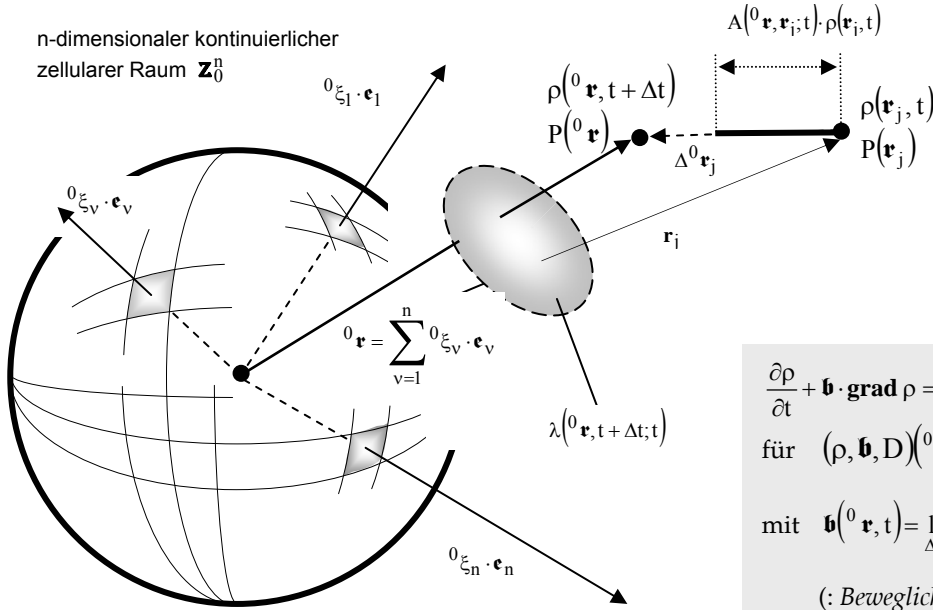
$$T_0 = \left[ t_0 \leq t \leq T \mid t \in \mathbf{R}, 0 \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} t \bmod \delta \right] \quad (4.2)$$

Sind  $Z$  und  $Z'$  Zustände im  $Z_0^n$ , ist  $Z'$  unmittelbar nachfolgender Zustand von  $Z$ , dann heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit  $A(X' = \rho(\mathbf{r}, t + \Delta t) \mid X = \rho(\mathbf{r}_j, t))$  *Übergangswahrscheinlichkeit* von  $Z$  in  $(\mathbf{r}, t)$  nach  $Z'$  in  $(\mathbf{r}', t + \Delta t)$ , bezeichnet als  $A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t)$ , zu interpretieren als Affinität von  $P(\mathbf{r}_j)$  auf  $P(\mathbf{r})$  zum Zeitpunkt  $t \in T_0$ , auch anzusehen als dimensionslose Immissionsrate von Partikeln in  $P(\mathbf{r})$  aus  $P(\mathbf{r}_j)$ .

##### 3.1 Ausgleich von Ladungsdichten im $Z_0^n$ durch Partikelfluss

Infolge bestehender Dichteunterschiede findet im kontinuierlichen Aktionsraum ein ausgleichender Partikelfluss verlustfrei statt. Ladungsdichte und Richtung des Partikelflusses bedingen einander: Je unterschiedlicher lokale Ladungsdichten, desto mächtiger der Partikelfluss zu deren Ausgleich und umgekehrt. Beide Prozesse sind gleichgewichtig. Gradient der Ladungsdichten und Richtung des Partikelflusses heben sich gegenseitig auf.

Ein Partikel  $\pi$  bewegt sich im Aktionsraum  $Z_0^n$  von einem Emissionspunkt  $\overset{\otimes}{P}$  zu einem Immissionspunkt  $\overset{\bullet}{P}$ . Konzentriert  $\overset{\otimes}{P}$  insgesamt  $N$  Partikel  $\pi$  und benötigt ein Partikel  $\pi$  zu seiner Emission aus  $\overset{\otimes}{P}$  die Zeit  $q[s]$ , dann ist  $\Pi = Nq[\pi s]$  *Partikelladung* des Emissionspunktes  $\overset{\otimes}{P}$ , zentriert im Volumen  $V$ , eingeschlossen von einer Hüllfläche  $A$ . Die Entladezeit aus  $V$  bestimmt die Partikelladung  $\Pi$  von  $\overset{\otimes}{P}$ . Schließt  $V$  genau  $N(V)$  Partikel ein, dann ist  $\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{N(V)}{V}$  *Partikeldichte* von  $\overset{\otimes}{P}$ . Unterschiedlicher Partikeldichten gleichen sich in Raum und Zeit als Partikelstrom aus. Es ist  $I = \frac{\Delta \Pi}{\Delta t} [\pi]$  *Partikelstromstärke* aus  $\overset{\otimes}{P}$ .



**Fig. 4.1** Änderung der Partikeldichte durch Partikelfluss beim Übergang von  $t$  nach  $t + \Delta t$  für  $P(0\mathbf{r}) \in \mathbf{Z}_0^n$

Aus den Taylorentwicklungen für  $\rho(0\mathbf{r}, t + \Delta t)$  und  $\rho(0\mathbf{r} - \Delta^0\mathbf{r}_j, t)$  bezüglich  $P(0\mathbf{r})$  und  $t$  folgt unter  $\Delta(0\mathbf{r}_j, \Delta t) \rightarrow 0$  die *Fokker-Planck-Gleichung* (FPG) als Änderungsbeschreibung der Partikeldichte im  $\mathbf{Z}_0^n$  in Raum und Zeit.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \text{grad } \rho = \text{div}(\mathbf{D} \cdot \text{grad } \rho) \quad (4.4)$$

$$\text{für } (\rho, \mathbf{b}, \mathbf{D})(0\mathbf{r}, t)$$

$$\text{mit } \mathbf{b}(0\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{r}_j \in \lambda} A(0\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t) \frac{\Delta^0 \mathbf{r}_j}{\Delta t} \quad (4.4.1)$$

(: *Beweglichkeitsvektor*)

$$\text{und } \mathbf{D}(0\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{r}_j \in \lambda} A(0\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t) \frac{[\Delta^0 \mathbf{r}_j]^2}{2\Delta t} \quad (4.4.2)$$

(: *Diffusionskoeffizient*)

Eine Abbildung  $\lambda(0\mathbf{r}, t + \Delta t; t)$ , von Wunsch<sup>1</sup> eingeführt zur Beschreibung von Raumfortschritten in zellulären Systemen [WS 05], markiert den Einzugsbereich von  $P(0\mathbf{r}) \in \mathbf{Z}_0^n$  zum Zeitpunkt  $t$ , ab dem ein Partikelfluss auf  $P(0\mathbf{r})$  stattfindet, der in  $t + \Delta t$  vollendet ist. So ist  $P(\mathbf{r}_j) \in \lambda(0\mathbf{r}, t + \Delta t; t) \subseteq \mathbf{Z}_0^n$ , wenn  $0 < A(0\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t)$  gilt. Fig. 4.1 zeigt die Änderung der Partikeldichte beim Übergang von  $t$  nach  $t + \Delta t$  für  $P(0\mathbf{r})$  als Immittent zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  und  $P(\mathbf{r}_j)$  als Emittent für  $P(0\mathbf{r})$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Bei verlustfreiem Ausgleich von Partikeldichten  $\rho$  im  $\mathbf{Z}_0^n$  erreichen alle auf den Raumpunkt  $P(0\mathbf{r})$  gerichteten Partikelströme diesen auch vollständig, demnach  $\sum_{\mathbf{r}_j \in \lambda} A(0\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t) = 1$  für  $P(\mathbf{r}_j) \in \lambda(0\mathbf{r}, t + \Delta t; t)$  gelten muss. Gleichung (4.3) ist Bilanzgleichung für den Ausgleich unterschiedlicher Partikeldichten  $\rho$ .

$$\rho(0\mathbf{r}, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{r}_j \in \lambda} A(0\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t) \rho(0\mathbf{r} - \Delta^0 \mathbf{r}_j, t) \quad (4.3)$$

$$\text{mit } \lambda = \lambda(0\mathbf{r}, t + \Delta t; t) \cdot \Delta^0 \mathbf{r}_j = 0\mathbf{r} - \mathbf{r}_j$$

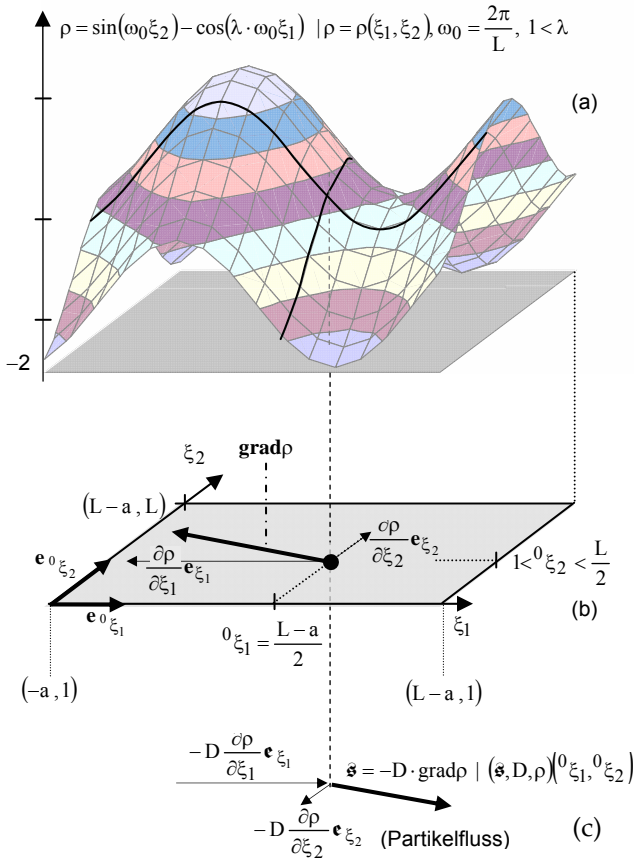
Der *Beweglichkeitsvektor*  $\mathbf{b}(0\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$  definiert in  $t$  die Richtung und die Geschwindigkeit eines aus der Umgebung kommenden und auf  $P(0\mathbf{r})$  driftenden Partikelflusses, bestimmt durch die in  $t$  bestehende Verteilung der Übergangswahrscheinlichkeiten  $A$  auf  $P(0\mathbf{r})$  aus den Raumpunkten der Umgebung von  $P(0\mathbf{r})$  im  $\mathbf{Z}_0^n$ . Es beschreibt  $\mathbf{b}$  die Orientierung des driftenden Partikelstroms.

Der *Diffusionskoeffizient*  $\mathbf{D}(0\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$  beschreibt im  $\mathbf{Z}_0^n$  die *Durchlässigkeit* des Raumpunktes  $P(0\mathbf{r})$  für Partikelströme, bezogen auf den gegebenen Immissionsquerschnitt  $\sum_{\mathbf{r}_j \in \lambda} A(0\mathbf{r}, \mathbf{r}_j; t) [\Delta^0 \mathbf{r}_j]^2$ , definiert durch die Geschwindigkeit  $\frac{\Delta^0 \mathbf{r}_j}{\Delta t}$ , mit der ein Partikel längs einer Wegstrecke  $\Delta^0 \mathbf{r}_j$  den Raumpunkt  $P(0\mathbf{r})$  erreicht, genommen über alle Partikel, die  $P(0\mathbf{r})$  erreichen. In dieser Eigenschaft ist  $\mathbf{D}(0\mathbf{r}, t)$  Proportionalitätsfaktor zwischen der *Partikelstromdichte*  $\mathbf{s}$ , die auf dem Raumpunkt  $P$  lastet, und der auf  $P$  gerichteten Kraft  $-\text{grad } \rho$  zum Ausgleich von Dichteunterschieden im  $\mathbf{Z}_0^n$ .

$$\mathbf{s} = -\mathbf{D} \cdot \text{grad } \rho \left[ \frac{\pi \text{m}}{\mu^n} \right] \quad (4.4.3)$$

(: *Partikelstromdichte*)

<sup>1</sup> G. Wunsch, Prof. em. an der TU Dresden



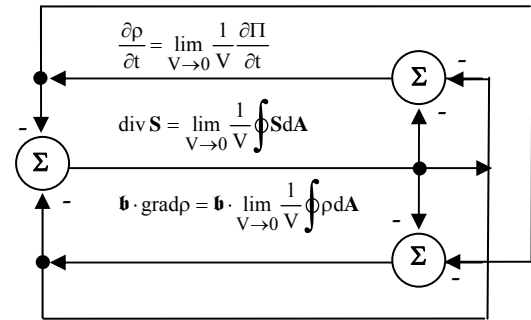
**Fig. 4.2** Gradient einer hypothetischen Partikeldichte  $\rho$  und daraus resultierende Flussrichtung der *Partikelstromdichte*  $\mathbf{s} = -D \cdot \text{grad } \rho \mid (\mathbf{s}, D, \rho)(^0 \xi_1, ^0 \xi_2)$  ( $D$ : Diffusionskoeffizient)

Zur Veranschaulichung zeigt Fig. 3.2 (a) in den Grenzen  $1 \leq x(y) \leq L$  eine (zeitinvariante) hypothetische Dichteverteilung  $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2)$  im  $\mathbf{Z}_0^2$  und in (b) den durch  $\text{grad } \rho = \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} \mathbf{e}_{\xi_1} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi_2} \mathbf{e}_{\xi_2}$  orientierten Partikelfluss aus bzw. nach  $P(^0 \mathbf{r})$  für  $^0 \mathbf{r} = (^0 \xi_1, ^0 \xi_2)$ . Es driftet (c) infolge  $0 < \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1}$  ein Partikelfluss nach  $P(^0 \mathbf{r})$  entlang der Koordinatenachse  $\xi_1$  und infolge  $0 < \frac{\partial \rho}{\partial \xi_2}$  ein Partikelfluss aus  $P(^0 \mathbf{r})$  entlang der Koordinatenachse  $\xi_2$ , woraus die Flussrichtung der *Partikelstromdichte*  $\mathbf{s}(^0 \mathbf{r}, t)$  resultiert. Unter Berücksichtigung von (4.4.3) beschreibt (4.4) die Stromdichtebilanz (4.5) im kontinuierlichen Aktionsraum  $\mathbf{Z}_0^n$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \text{grad } \rho + \text{div } \mathbf{s} = 0 \quad (4.5)$$

## 4.2 Spezialfälle für den Ausgleichsprozess

Raumpunkt  $P$  zentriert im  $\mathbf{Z}_0^n$  das von der Hüllfläche  $A$  eingeschlossene Volumen  $V$ . Die Divergenz des Vektorflusses  $\mathbf{S}$  über  $A$  entspricht der Winkellage, die  $\mathbf{S}$  mit der Flächennormalen  $d\mathbf{A}$  einnimmt, genommen über die Hüllfläche  $A$  für kleiner werdendes Volumen  $V$ , das heißt  $\text{div } \mathbf{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{S} d\mathbf{A}$ . Ändert sich in  $P$  zum Zeitpunkt  $t$  die Dichte  $\rho$  durch *Raumfortschritt*, dann wird die Hüllfläche  $A$  von Flusslinien durchsetzt in Richtung des Vektors der Flächennormalen  $d\mathbf{A}$ , d. h.  $\text{grad } \rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \rho d\mathbf{A}$ . Ändert sich in  $P$  die Dichte  $\rho$  um  $\partial \rho$  durch *Zeitfortschritt*, dann ist beschreibt  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{\partial \Pi}{\partial t}$  den über  $P$  fließenden Partikelstrom der Stärke  $I = \frac{\partial \Pi}{\partial t}$  (Fig. 4.3).



**Fig. 4.3** Verknüpfung der Feldgrößen im  $\mathbf{Z}_0^n$  zur Beschreibung der Ausgleichsprozesse

$$1. \text{ Spezialfall } \mathbf{b} \perp \text{grad } \rho \mapsto \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{s} = 0$$

Die FPG wird zur *Kontinuitätsgleichung* [WU 73], demnach eine zeitliche Änderung der Partikeldichte  $\rho$  nur durch einen Vektorfluss über die Hüllfläche  $A$  von  $V$  zustande kommt. Der über Raumpunkt  $P$  fließende Partikelstrom  $I_T = \frac{\partial \Pi}{\partial t}$  ist durch den Diffusionsstrom  $I_{\text{Diff}} = \oint \mathbf{S} d\mathbf{A}$  infolge Hüllenfluss über  $A$  bestimmt, es gilt  $I_T = -I_{\text{Diff}}$ . Die Winkellage  $\mathbf{b} \perp \text{grad } \rho$  verhindert einen driftbedingten Hüllenfluss des Dichtevektors  $\mathbf{b}\rho$ .

2. Spezialfall  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \mapsto \mathbf{b} \cdot \text{grad} \rho + \text{div} \mathbf{s} = 0$

Der  $n$ -dimensionale Aktionsraum  $\mathbf{Z}_0^n$  befindet sich für jeden Zeitpunkt  $t \in T_0$  in einem statischen Gleichgewichtszustand. Lediglich eine durch Drift verursachte Dichteänderung im Raum findet statt. Die geltende Bilanzgleichung  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left[ \oint \rho d\mathbf{A} + \oint \mathbf{S} d\mathbf{A} \right] = 0$  mit  $(\rho, \mathbf{b}, \mathbf{S})^0(\mathbf{r}, t)$  besagt, dass die Stromstärke eines Partikelflusses über  $P(\mathbf{r})$  in  $t$  lediglich von der Driftstromstärke  $I_{\text{Drift}} = \oint \rho d\mathbf{A} [\pi]$  abhängt. Wegen

Wegen  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \rho d\mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot \text{grad} \rho$

ist die Driftstromstärke  $I_{\text{Drift}}$  durch den Einschlusswinkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\text{grad} \rho$  bestimmt.

## 5. KORPUSKELFLUSS IN EINEM DISKRETEN AKTIONSRAUM

Zu Grunde liegt ein diskreter Aktionsraum zur Modellierung und Simulation eines dMS (Fig. 2.7) auf der Basis von Korpuskelströmen. Folgende Eigenschaften sind für das dMS relevant:

1. Das dMS ist ein diskret strukturiertes System aus  $m$  Prozessoren, die über ein Verkehrsfeld aus  $m$  Verkehrsknoten miteinander verkoppelt sind.
2. Im Verkehrsfeld des dMS zirkulieren Verkehrsflüsse.
3. Bei nur unvollständiger Vernetzung der Knoten im Verkehrsfeld des dMS wird auf den zirkulierenden Verkehrsfluss ein Richtungszwang ausgeübt.

Modelliert und simuliert wird das dMS in einem diskreten Aktionsraum, in welchen eine Raumordnungsvorschrift eine Menge  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  von Raumpunkten  $P$  zur Positionierung der Verkehrsknoten projiziert. Algebraisch existiert der diskrete Aktionsraum als Orthogonalsystem. Die Topologie des dMS wird zunächst durch Projektion einer Kanalisierungsvorschrift in den diskreten Aktionsraum modelliert. Anschließend wird das Orthogonalsystem in ein (algebraisch vorteilhafteres) Orthonormalsystem überführt, um in ihm die Verkehrsflüsse des dMS adäquat den Partikelströmen im kontinuierlichen Aktionsraum durch Korpuskelströme simulieren zu können.

**$n$ -dimensionaler diskreter Aktionsraum  $\mathbf{Z}_\lambda^n$ :** Die Raumpunkte im kontinuierlichen Aktionsraum  $\mathbf{Z}_0^n$  sind infinitesimal eng benachbart; der Dichteausgleich erfolgt als zeitkontinuierlicher Partikelfluss der endet, wenn sich alle lokalen Dichten unter Zeitverbrauch ausgeglichen haben. Da keine

Raumrichtung für den Partikeltransfer ausgeschlossen ist, besteht auf den genommenen Transportweg auch kein Richtungszwang. In dieser Eigenschaft unterscheidet sich der kontinuierliche vom diskreten Aktionsraum sehr wesentlich. Außerdem ereignen sich die Ausgleichsprozesse nur raum- und zeitdiskret.

Per Definition bezeichne  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  einen  $n$ -dimensionalen diskreten Aktionsraum, der über eine Raumordnungsvorschrift  $\mathbf{m} \mathbf{R}^n \xrightarrow{\rightarrow} \mathbf{Z}_\lambda^n$  (5.1) aus einem gegebenen Vorrat  $\mathbf{P}$  Raumpunkte  $P$  einschließt, die in einem durch  $0 < \lambda \in \mathbf{R}$  bemessenen diskreten Abstand in Nachbarschaft zueinander stehen.

$$\mathbf{m} \mathbf{R}^n : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Z}_\lambda^n = \left\{ P(\mathbf{r}_i) \mid 0 < \lambda, 1 \leq i \leq m, \mathbf{r}_i = \sum_{v=1}^n i_{\xi_v} \mathbf{e}_v, i_{\xi_v} \in \mathbf{R}, 0 \equiv i_{\xi_v} \bmod \lambda \right\}$$

mit  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  (5.1)

Entsprechend dieser Definition gilt  $\mathbf{Z}_\lambda^n \subseteq \mathbf{Z}_0^n$ , demnach die Änderungsbeschreibung der Partikeldichte im  $\mathbf{Z}_0^n$  auf die Beschreibung von Ausgleichsprozessen im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  raumbezogen übertragen werden kann. Die zur Beschreibung der Ausgleichsprozesse im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  notwendigen diskreten Zeitpunkte  $\Delta \tau$  enthält eine Zeitskala  $T_{\Delta \tau}$  (5.2).

$$T_{\Delta \tau} = \{\tau_0 \leq \tau \leq T \mid 0 < \Delta \tau, \tau \in \mathbf{R}, 0 \equiv \tau \bmod \Delta \tau\} \quad (5.2)$$

Bei der Übertragung der Änderungsbeschreibung im  $\mathbf{Z}_0^n$  auf Ausgleichsprozesse im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  ist der topologiebedingte Richtungszwang auf den Korpuskelfluss im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  zu berücksichtigen. Eine Kanalisierungsvorschrift  $\mathbf{m} \mathbf{K}^n \xrightarrow{\rightarrow} \mathbf{Z}_\lambda^n$  projiziert über die Ortslagen aller  $m$  Raumpunkte im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  eine Topologie, quantifiziert durch die Adjazenzmatrix  $^{(0)} \underline{\mathbf{A}}$ .

$$\mathbf{m} \mathbf{K}^n : \mathbf{Z}_\lambda^n \xrightarrow{\rightarrow} ^{(0)} \underline{\mathbf{A}} = \left\| ^{(0)} a_{i,j} \right\|_{m,m} \quad (5.3.1)$$

mit  $^{(0)} a_{i,j} = 1$  für eine bestehende unmittelbare Verbindung von  $P(\mathbf{r}_i)$  nach  $P(\mathbf{r}_j)$  und ( $=0$  sonst)

Für den Fall  $^{(0)} a_{i,j} = 0$  besteht eine nur mittelbare Verbindung von  $P(\mathbf{r}_i)$  nach  $P(\mathbf{r}_j)$  über mindestens  $l_{i,j} (> 1) \in \mathfrak{M}$  (: Mindestmatrix) Bögen hinweg [SC 03]. Korrespondierend zum  $\mathbf{Z}_0^n$  ist  $\mathbf{A}^*(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \tau)$  im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  die zum diskreten Zeitpunkt  $\tau \in T_{\Delta \tau}$  auf  $P(\mathbf{r}_i)$  aus  $P(\mathbf{r}_j)$  ausgeübte Referenzierung.

Während im  $\mathbf{Z}_0^n$  ein Partikelfluss von  $P(\mathbf{r}_s)$  nach  $P(\mathbf{r}_d)$  längs des kürzesten (euklidischen) Weges verläuft, ereignet

sich ein *Korpuskelfluss* im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  längs eines Pfades  $\overset{P}{\leftarrow}_{d,s}$  über  $l_{d,s}$  Teilwege hinweg (5.3.2).

$$\overset{P}{\leftarrow}_{d,s} = \left\{ {}^{(0)}P(\mathbf{e}_s), \dots, {}^{(l)}P(\mathbf{e}_v), {}^{(l')}P(\mathbf{e}_{v\uparrow 1}) {}^{(0)}a_{v\uparrow 1,v} = 1, \dots, {}^{(l_{d,s})}P(\mathbf{e}_d) \right\} \quad (5.3.2)$$

Bezeichnet  $S_{v\uparrow 1,v}$  die reale Länge des Teilweges von  $P(\mathbf{r}_v)$  nach  $P(\mathbf{r}_{v\uparrow 1})$  längs  $\overset{P}{\leftarrow}_{d,s}$ , dann bezeichnet  $L_{d,s}$  (5.3.3) die *topologische Länge* über Transitpunkte  $P(\mathbf{r}_v)$  hinweg von Quellpunkt  $P(\mathbf{r}_s)$  nach Zielpunkt  $P(\mathbf{r}_d)$ .

$$L_{d,s} = \sum_{\left( P(\mathbf{r}_v) \in \overset{P}{\leftarrow}_{d,s} \right)} S_{v\uparrow 1,v} \quad (5.3.3)$$

***m*-dimensionaler diskreter Aktionsraum  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$ :** Der  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  eignet sich in Raum und Zeit für die Überführung differentieller Konstrukte im  $\mathbf{Z}_0^n$  in algebraische, die euklidischen Abstände zwischen den Raumpunkten des  $\mathbf{Z}_0^n$  sind aus den topologischen Längen zwischen den Raumpunkten im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  rekonstruierbar. Von Nachteil ist aber, dass sich die algebraischen Konstrukte im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  wegen  $m \neq n$  nicht ausschließlich über Einheitsvektoren definieren und dementsprechend rechenintensiv sind. Hilfsweise wird deshalb die bestehende *Raumordnungsvorschrift*  $\overset{m}{R}^n \rightarrow \overset{m}{R}^m$  abgewandelt und die Projektion  $\overset{m}{R}^m : P \rightarrow \mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  vorgenommen.

Dabei werden die  $m$  Raumpunkte  $P$  aus  $\mathbf{P}$  in den Spitzen von  $m$  Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_m$  mit  $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j \forall (i,j)$  positioniert, zwischen denen die (identischen) *euklidischen* Abstände  $\sqrt{2}$  bestehen (Orthonormalsystem). Von Vorteil ist, dass der  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  auf seine den Ursprung umgebende *Einheitskugel* reduziert wird, weshalb algebraische Operationen im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  extrem einfach verlaufen, was den  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  zur Überführung der differentiellen Konstrukte des  $\mathbf{Z}_0^n$  in algebraische favorisiert. Von Nachteil ist, dass im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  die real bestehenden euklidischen Abstände zwischen den Raumpunkten  $P$  im Herkunftsraum nicht mehr vorhanden sind. Dieser Nachteil wird ausgeglichen durch die Einführung eines *metrischen Kalküls*  $\kappa$ , abgeleitet aus den Verhältnissen im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$ .

**Metrisches Kalkül:** Die topologische Weglänge  $L_{d,s}$  von  $P(\mathbf{r}_s)$  nach  $P(\mathbf{r}_d)$  im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  ist zeitinvariant und resultiert aus

der Summe aller lokalen Teilwege  $S_{v\uparrow 1,v}$  unter  ${}^{(0)}a_{v\uparrow 1,v} = 1$  (5.3.1) im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  längs des Pfades  $\overset{P}{\leftarrow}_{d,s}$  (5.3.3). Zeitabhängig

verläuft jedoch der längs  $S$  im  $\mathbf{Z}_\lambda^n$  genommene Wegefortschritt  $\Delta S$ . Je größer  $\Delta\tau$ , desto größer  $\Delta S_{v\uparrow 1,v} = \Delta S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau)$ . Dementsprechend zeitabhängig ist auch der in  $\Delta\tau$  längs  $\overset{P}{\leftarrow}_{d,s}$  genommene Wegefortschritt  $\Delta L_{d,s} = \Delta L_{d,s}(\Delta\tau)$ . Daraus resultiert das metrische Kalkül  $\kappa_{d,s} = \kappa_{d,s}(\Delta\tau)$ .

$$\kappa_{d,s}(\Delta\tau) = \frac{\Delta L_{d,s}(\Delta\tau)}{L_{d,s}} \quad (:\text{metrische Kalkül}) \quad (5.4)$$

In (5.4) ist  $L_{d,s}$  die topologische Weglänge von  $P(\mathbf{r}_s)$  nach  $P(\mathbf{r}_d)$  und  $\Delta L_{d,s}(\Delta\tau)$  der Wegefortschritt entlang  $\overset{P}{\leftarrow}_{d,s}$  beim Zeitfortschritt um  $\Delta\tau$

**Richtungszwang auf Korpuskelfluss:** Entsprechend (4.4.1) beschreibt der Beweglichkeitsvektor  $\mathbf{b}(\mathbf{e}_d, \tau)$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  die Herkunftsrichtung des Korpuskelflusses auf  $P(\mathbf{e}_d)$  in  $\tau$ .

$$\mathbf{b}(\mathbf{e}_d, \tau) = \sum_{\left( P(\mathbf{e}_j) \in \mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m \right)} A^*(\mathbf{e}_d, \mathbf{e}_j; \tau) {}^d\mathbf{e}_j \cdot \kappa_{d,j}(\Delta\tau) = \sqrt{2} \mathbf{b}(\mathbf{e}_d, \tau) \quad (5.5)$$

Bei zeitkonstanter Topologie und Übergangswahrscheinlichkeit  $A^*$  bleibt die Herkunftsrichtung (5.5) ohne Änderung in  $\tau$ , demzufolge  $A^*(\mathbf{e}_d, \mathbf{e}_j; \tau) \Rightarrow {}^d y_j$  mit  $\sum_{(j)} {}^d y_j = 1$ .

Jedoch variiert das *metrische Kalkül* (5.4)  $\kappa_{d,j}(\Delta\tau)$  in  $\Delta\tau$ . Es beschreibt den längenbezogenen Wegefortschritt  $\Delta L_{d,j}(\Delta\tau)$  längs  $\overset{P}{\leftarrow}_{d,j}$  beim Zeitfortschritt um  $\Delta\tau$ .

Die bezogene Länge  $L_{d,j}$  resultiert aus der Summe aller Teilstrecken  $S$  (5.3.3). Zu beachten ist, dass der Wegefortschritt  $\Delta S_{v\uparrow 1,v}$  in  $\Delta\tau$  nicht größer sein kann als  $S_{v\uparrow 1,v}$ , demzufolge  $\Delta S_{v\uparrow 1,v}$  zu diskriminieren ist. Es gilt

$$\Delta S_{v\uparrow 1,v}^*(\Delta\tau) = \begin{cases} \Delta S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau) & \text{für } \Delta S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau) < S_{v\uparrow 1,v} \\ S_{v\uparrow 1,v} & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.6)$$

folgerichtig dann auch  $0 < \Delta L_{d,s} = \sum_{\left( P(\mathbf{e}_v) \in \overset{P}{\leftarrow}_{d,s} \right)} \Delta S_{v\uparrow 1,v}^*(\Delta\tau) \leq L_{d,s}$ .

(5.6) bedingt  $\mathbf{b}(\mathbf{e}_d, \tau) \Rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{e}_d, \Delta\tau)$  in (5.5). Mit  ${}^d\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_d - \mathbf{e}_j$  und  $|{}^d\mathbf{e}_j| = \sqrt{2}$  folgen daraus zwei auf  $\Delta\tau$  bezogene An-



kunftsvektoren  $\Delta\tau\sqrt{2}\underline{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_d, \Delta\tau)$  und  $\Delta\tau\sqrt{2}\underline{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_d, \Delta\tau)$  in Richtung  $P(\mathbf{e}_d)$ .

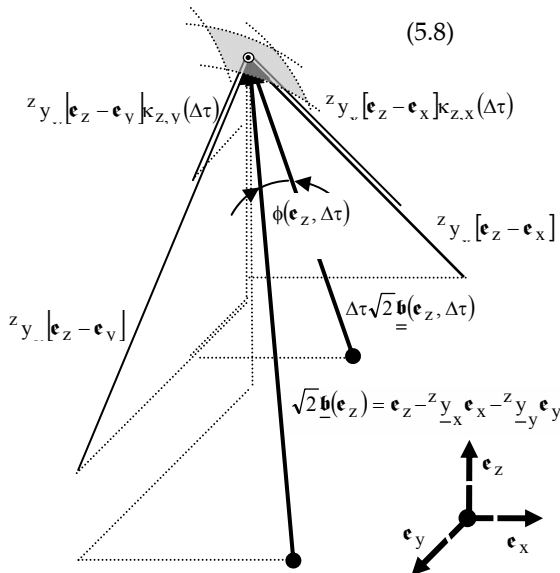
$$\Delta\tau\sqrt{2}\underline{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \underline{\mathbf{H}}(\Delta\tau)\mathbf{e}_d - \sum_{(j)} z_{y_j}(\Delta\tau)\mathbf{e}_j \quad (5.7.1)$$

$$\sqrt{2}\underline{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_d) = \mathbf{e}_d - \sum_{(j \neq z)} z_{y_j}\mathbf{e}_j \quad (5.7.2)$$

$$\text{mit } \underline{\mathbf{H}}(\Delta\tau) = \sum_{(j)} \underline{\mathbf{h}}_j(\Delta\tau), \quad \underline{\mathbf{h}}_j(\Delta\tau) = \underline{\mathbf{y}}_j \cdot \kappa_{d,j}(\Delta\tau) \text{ aus (5.4)}$$

(5.7.1) beschreibt die Herkunftsrichtung des Korpustelstroms auf  $P(\mathbf{e}_d)$  bei nur unvollständiger Vernetzung ( $0 < \kappa_{d,j}(\Delta\tau) \leq 1$ ) und (5.7.2) die Herkunftsrichtung bei vollständiger Vernetzung ( $\kappa_{d,j}(\Delta\tau) = 1$ ) zwischen allen Raumpunkten  $P$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$ . Deren *Winkellage*  $\phi(\mathbf{e}_d, \Delta\tau)$  zueinander beschreibt den *Richtungszwang* (5.8) auf den Korpustelstrom, veranschaulicht für  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^3$  in Fig. 5.1.

$$\phi(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \arccos \left( \frac{\underline{\mathbf{H}}(\Delta\tau) + \sum_{(j)} \left( \underline{\mathbf{y}}_j \right)^2 \kappa_{d,j}(\Delta\tau)}{\sqrt{\left( \underline{\mathbf{H}}(\Delta\tau) \right)^2 + \sum_{(j)} \left( \underline{\mathbf{y}}_j \cdot \kappa_{d,j}(\Delta\tau) \right)^2} \cdot \sqrt{1 + \sum_{(j)} \left( \underline{\mathbf{y}}_j \right)^2}} \right) \quad (5.8)$$



**Fig. 5.1** Winkellage  $\cos \phi(\mathbf{e}_z, \Delta\tau)$  zwischen Herkunftsrichtung des Korpustelstroms auf  $P(\mathbf{e}_z)$  bei unvollständiger ( $0 < \kappa(\Delta\tau) \leq 1$ ) und vollständiger Vernetzung ( $\kappa_{d,j} = 1$ ) zwischen allen Raumpunkten  $P$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^3 = \{P(\mathbf{e}_x), P(\mathbf{e}_y), P(\mathbf{e}_z)\}$ .

Eine vollständige Vernetzung aller Raumpunkte im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  schließt jeden Richtungszwang aus ( $\kappa_{d,j}(\Delta\tau) = 1$ , somit  $\underline{\mathbf{H}}(\Delta\tau) = 1$ ), demnach  $\cos \phi(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = 1$ .

**Durchlässigkeit für Korpustelströme bei zeitkonstanter Topologie:** Topologie und Übergangswahrscheinlichkeit  $A^*$  des Korpustelstroms auf den Raumpunkt  $P$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  seien (auch hier) ohne Änderung in  $\tau$ .

Die Durchlässigkeit eines Raumpunktes  $P$  im  $\mathbf{Z}_0^n$  resultiert aus der Summe aller zu  $P$  hinführenden Wegsstrecken  $\Delta\mathbf{r}$  multipliziert mit der genommenen Geschwindigkeit  $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\tau}$

längs  $\Delta\mathbf{r}$  für  $\Delta \rightarrow 0$ , bezeichnet als *Diffusionskoeffizient*  $D$ . In (4.4.2) wird die Länge einer jeden (!) Wegsstrecke mit der Übergangswahrscheinlichkeit  $A$  auf  $P$  gewichtet. In gleicher Weise wie bei der Berechnung des Richtungszwangs auf Korpustelströme im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  kann unter Berücksichtigung des *metrischen Kalküls*  $\kappa(\Delta\tau)$  auch die Durchlässigkeit für Korpustelströme im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  berechnet werden. Der Diffusionskoeffizient  $D$  ist abhängig vom zeitbedingten Wegeforschrift, d. h.  $D \Rightarrow \underline{\mathbf{D}}(\Delta\tau)$ .

Allerdings gilt auch hier, dass der Wegeforschrift  $\Delta S_{v \uparrow 1, v}$  in  $\Delta\tau$  nicht größer als  $S_{v \uparrow 1, v}$  sein darf, demzufolge  $D$  gemäß (5.6) zu diskriminieren ist.

$$\text{Für } D(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \sum_{(P(\mathbf{e}_j) \in \mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m)} \underline{\mathbf{y}}_j \frac{1}{2} \frac{\Delta^d \mathbf{e}_j(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \Delta^d \mathbf{e}_j(\Delta\tau), \text{ abge-}$$

leitet aus (4.4.2) für den  $\mathbf{Z}_0^n$ , folgt für  $\Delta^d \mathbf{e}_j(\Delta\tau) = \underline{\mathbf{d}} \mathbf{e}_j \kappa_{d,j}(\Delta\tau)$  mit  $\underline{\mathbf{d}} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_d - \mathbf{e}_j$  und  $\sum_{(P(\mathbf{e}_j) \in \mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m)} \underline{\mathbf{y}}_j = 1$  unmittelbar

$$\delta(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \frac{\sum_{(j)} \underline{\mathbf{y}}_j [\kappa_{d,j}(\Delta\tau)]^2}{\Delta\tau} \quad (5.9.1)$$

(:spezifische Diffusionskoeffizient)

und daraus

$$0 < D(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \delta(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) \Delta\tau \leq 1. \quad (5.9.2)$$

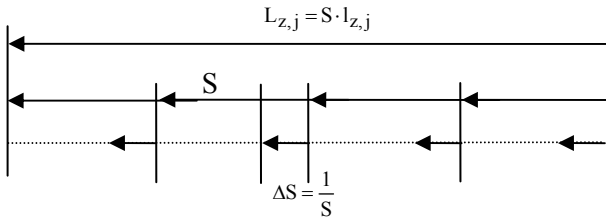
(:Diffusionskoeffizient)

Äquivalent zu (5.9.1) besteht die vektorielle Darstellung

$$\Delta\tau \cdot \delta(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \underline{\mathbf{f}}(\mathbf{e}_d) \cdot \underline{\mathbf{h}}(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) \text{ mit } \underline{\mathbf{f}}(\mathbf{e}_d) = \sum_{j=1}^m \underline{\mathbf{y}}_j \mathbf{e}_j \text{ für die}$$

Referenzierung und  $\underline{k}(\mathbf{e}_d, \Delta\tau) = \sum_{(j)} [\kappa_{d,j}(\Delta\tau)]^2 \mathbf{e}_j$  für die Vielfachheit des Wegefortschritts bei Inkrementierung von  $\Delta\tau$ .

**1. Spezialfall:** Die topologische Weglänge  $L_{d,s}$  längs des Pfades  $\mathbf{P}$  von  $\mathbf{P}(\mathbf{e}_s)$  nach  $\mathbf{P}(\mathbf{e}_d)$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  sei  $L_{d,s} = l_{d,s} \cdot S$ . Zwischen allen Raumpunkten  $\mathbf{P}$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  bestehe unter  $^{(0)}a=1$  der Abstand  $S=1$ . Der Zeitfortschritt  $\Delta\tau$  sei so bemessen, dass über alle  $\mathbf{P}$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  die Relation  $\frac{S}{L_{z,j}} = \frac{\Delta S}{S}$  erfüllt ist.



**Erklärung:** Simuliert wird für  $n$  Raumpunkte  $\mathbf{P}$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  der Fall, dass von einem Raumpunkt  $\mathbf{P}$  zu einem anderen unter  $^{(0)}a=1$  die Fortschrittsgeschwindigkeit  $v$  so groß ist, dass bereits innerhalb eines Bruchteils von  $\Delta\tau$  die Distanz von  $\mathbf{P}$  zum anderen Raumpunkt absolviert wird, weswegen für alle Raumpunkte  $\mathbf{P}$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  die globale Annahme  $S=1$  unter  $^{(0)}a=1$  gerechtfertigt ist.

**Ergebnis:**  $D(\mathbf{e}_d, \tau) \Rightarrow \underline{D}(\mathbf{e}_d, \tau) = \sum_{(\mathbf{P}(\mathbf{e}_j) \in \mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m)} \frac{d_{-j}}{(l_{d,j})^2}$

**2. Spezialfall:** Die topologische Weglänge zwischen allen Raumpunkten  $\mathbf{P}$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  sei  $L=1$ , damit auch  $S=1$ , demnach  $l=1$  unter  $L=1 \cdot S$ . Der Zeitfortschritt  $\Delta\tau$  sei so bemessen, dass  $\Delta S=S$  für alle  $\mathbf{P}$  im  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  erfüllt ist.

**Erklärung:** Die Topologie des  $\mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m$  verkoppelt jeden Raumpunkt  $\mathbf{P}$  mit jedem anderen, außer mit sich selbst, demzufolge  $L=S=1$ . Die Fortschrittsgeschwindigkeit  $v$  längs eines jeden Pfades ist so groß, dass bereits innerhalb eines infinitesimal kleinen Bruchteils des Zeitintervalls  $\Delta\tau$  ein Pfad absolviert wurde.

**Ergebnis:**  $D(\mathbf{e}_d, \tau) \Rightarrow \underline{D}(\mathbf{e}_d, \tau) = \sum_{(\mathbf{P}(\mathbf{e}_j) \in \mathbf{Z}_{\sqrt{2}}^m)} d_{-j} = 1$

## 6. DIFFUSIONSKOEFFIZIENT $D$ UND WINKEL DER FEHLABWEICHUNG $\phi$ FÜR EIN AUSGEWÄHLTES ANWENDUNGSBEISPIEL

Im Ausführungsbeispiel Kap. 2 zur stochastischen Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  endet eine im inneren Gebietpunkt  $^0P$  des diskreten Integrationsgebietes  $B^*$  gestartete Irrfahrt eines Teilchens bedingungslos in einem Gebietpunkt  $\mathbf{P}$  längs des Gebietsrandes  $R_{B^*}$  von  $B^*$ . In einer nächsten in  $^0P$  gestarteten Irrfahrt endet diese bedingungslos in  $\mathbf{P}'$  usw. Orientiert werden die Irrfahrten durch definierte Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Gebietpunkten  $\mathbf{P}$  im Innern des Integrationsgebietes  $B^*$ . Die Verteilung der Ankünfte längs  $R_{B^*}$  aller in  $^0P$  gestarteten Irrfahrten gibt Auskunft über die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit von  $^0P$  aus allen Gebietpunkten längs  $R_{B^*}$ , worauf, wie dargestellt in Kap. 2, das Prinzip zur stochastischen Lösung von  $\Delta u = 0$  beruht. Demnach repräsentiert die stochastische Orientierung der Irrfahrten in  $B^*$  die Lösung von  $\Delta u = 0$ . Die Belastung des Verkehrsfeldes eines dMS zur stochastischen Lösung der Differentialgleichung ist bestimmt durch die simultane Vielfalt solcher Irrfahrten, durch deren Überlagerung, durch den topologiebedingten *Richtungszwang*, durch die *Durchlässigkeit* der Verkehrsknoten für simultan stattfindende Irrfahrten, um nur einige Parameter zu nennen.

An einem ausgewählten Anwendungsbeispiel soll die Abhängigkeit der Parameter *Richtungszwang* und *Durchlässigkeit* für eine gewählte Topologie des Verkehrsfeldes mit definierten Referenzierungen zwischen den Prozessoren des Prozessorfeldes erörtert werden.

Ausgewähltes Anwendungsbeispiel zur Simulation von Teilchenflüssen im Meter- und Sekundenbereich sei ein dMS entsprechend Fig. 2.7, bestehend aus 5 Prozessoren/Verkehrsknoten. Den in Fig. 6.1 angegebenen Topologiegraphen des Verkehrsfeldes beschreibt die Adjazenzmatrix  $^{(0)}\mathbf{a} = \left\| ^{(0)}a_{i,j} \right\|_{5,5}$  mit  $^{(0)}a_{i,j} = \sigma(^{(0)}y_{i,j})$  aus (3.3.1) unter  $\sigma(x > 0) = 1$  ( $= 0$  sonst). Fig. 6.1 enthält die topologiebedingte Weglänge  $L_{d,s}$  [m] von jedem Quellknoten ( $s$ ) zu jedem Zielknoten ( $d$ ) und den Wegefortschritt  $\Delta S_{i,j}(\Delta\tau)$  [m] unter  $^{(0)}a_{i,j} = 1$  und  $\Delta S_{i,j} \leq S_{i,j}$  entlang  $\mathbf{P}_{\leftarrow d,s}$  beim Zeitfortschritt um  $\Delta\tau = 1s$  zur Bestimmung des metrischen Kalküls  $\kappa_{d,s}(\Delta\tau)$ .

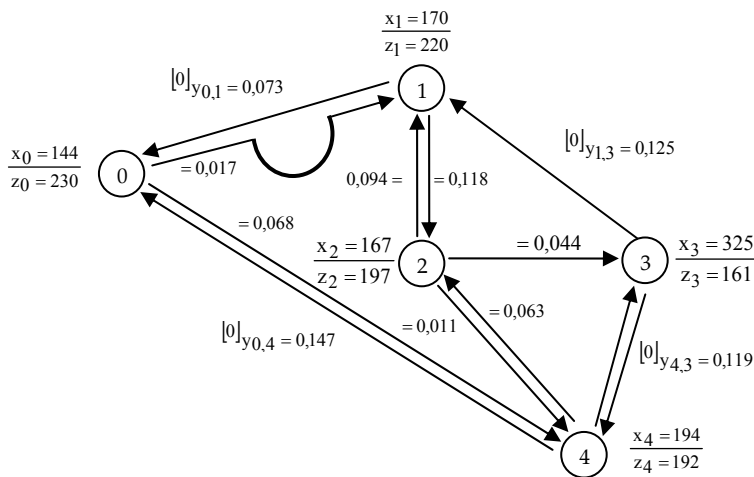


Fig. 6.2 zeigt die Verhältnisse bei paritätischer Vervielfachung  $n$  aller Wegefortschritte in  $\Delta\tau$  ( $= 1s$ ). Während sich der Diffusionskoeffizient  $D$  proportional zu  $n$  entwickelt, verläuft die Entwicklung des Winkels  $\phi$  der Fehlabweichung disproportional. Die Knoten (1) und (2) weisen zwischen  $n = 1$  und  $n = 5$  einen konstanten Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung (WdF) auf. Ab  $n = 6$  besteht zwischen beiden Knoten gegenseitige Erreichbarkeit in nur einer Zeiteinheit  $\Delta\tau$  ( $\overline{AA'}$ ). Ab  $n > 6$  reduzieren sich für beide Knoten (allerdings unterschiedlich) die WdF  $\phi_1$  und  $\phi_2$ . Für  $n > 14$  gilt  $\phi_2 = 0^\circ$  ( $\overline{BB'}$ ).

Ziel-k. d,(i):	Quellknoten s,(j):				
	0	1	2	3	4
0	379	175	255	365	330
1	204	379	80	190	534
2	284	80	160	270	140
3	455	240	160	250	125
4	330	505	140	125	660

topologiebedingte Weglängen  $L_{d,s}$ ,  $S_{i,j}$  [m]

0	∞	13,89	∞	∞	13,89
1	13,89	∞	13,89	13,89	∞
2	∞	13,89	∞	∞	13,89
3	∞	∞	13,89	∞	13,89
4	13,89	∞	13,89	13,89	∞

Wegefortschritt  $\Delta S_{i,j}(\Delta\tau)$  [m]

unter  $(0)_{a_i,j} = 1$  und  $\Delta\tau = 1s$

**Fig. 6.1** Topologiegraph eines dMS mit 5 Prozessoren /Verkehrsknoten, topologiebedingte Weglänge  $L_{d,s}$  [m] von jedem Quellknoten (s) zu jedem Zielknoten (d) und Wegefortschritt  $\Delta S_{i,j}(\Delta\tau)$  unter  $(a)_{i,j}=1$  und  $\Delta S_{i,j}(\Delta\tau)$  entlang  $\mathbf{P}$  beim Zeitfortschritt um  $\Delta\tau=1s$

Die Übergangsmatrix  ${}^{(0)}\mathfrak{Y}$  konvergiert (Kapitel 4) gegen die Referenzmatrix  $\mathfrak{Y} = \left\| y_{i,j} \right\|_{5,5}$ , deren Elemente relative Referenzhäufigkeiten zwischen den Verkehrsknoten des dMS sind. Speziell konvergiert die Übergangsmatrix  ${}^{(0)}\mathfrak{Y}$  gem. (3.3.1) für die in Fig. 6.1 gegebene Topologie eines dMS gegen die Referenzmatrix  $\mathfrak{Y}$  (3.3.2) zwischen allen Knoten des Verkehrsfeldes. Die der Topologiebewertung zu Grunde liegenden Parameter *Durchlässigkeit* und *Richtungszwang* ändern sich mit zunehmendem Wegefortschritt  $\Delta S$  in  $\Delta \tau$ , diskriminiert durch  $\Delta S \leq S$  unter  ${}^{(0)}a = 1$ .

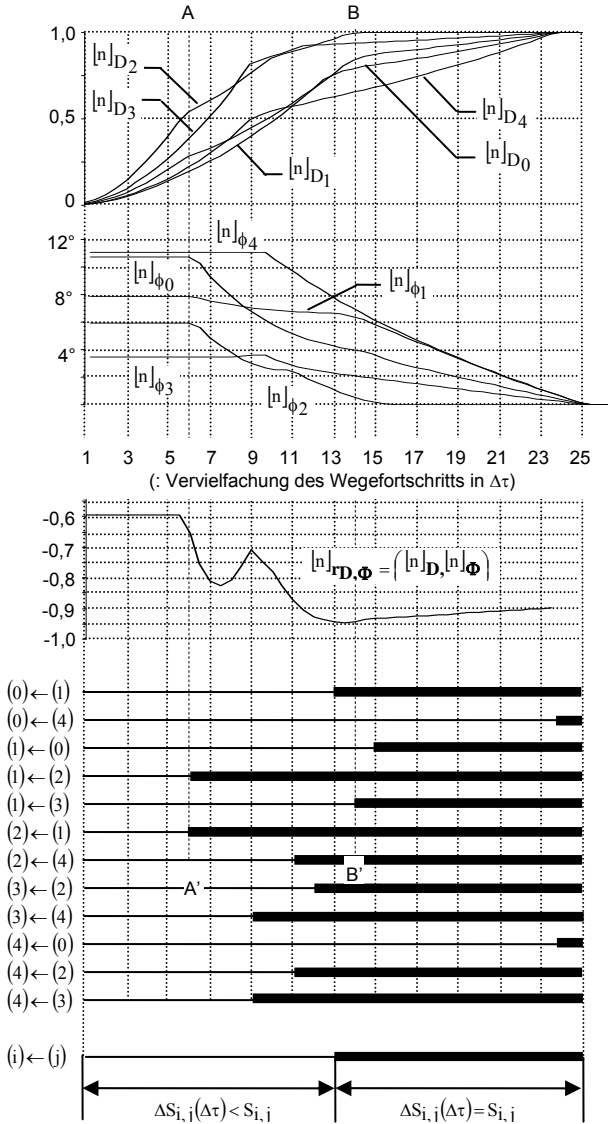
Bei wachsender Vervielfachung  $n$  des Wegefortschritts in  $\Delta\tau$  ändern sich für jeden Knoten  $i$  ( $= 0, \dots, 4$ ) *Diffusionskoeffizient*  $D$  und *Winkel der Fehlabweichung*  $\phi$ . Plausibel reduzieren sich bei wachsendem  $n$  aber auch die Erreichbarkeitszeiten eines jeden Knotens aus allen anderen Knoten einschließlich aus sich selbst.

Unter  ${}^{(0)}a_{d,s} = 0$  ist entsprechend (5.3.2)

$$P_{\leftarrow d,s} = \left\{ {}^{(0)}P(\mathbf{c}_s), \dots, {}^{(l)}P(\mathbf{c}_v), {}^{(l')}P(\mathbf{c}_{v\uparrow 1}) {}^{(0)}a_{v\uparrow 1,v} = 1, \dots, {}^{(l_{d,s})}P(\mathbf{c}_d) \right\}$$
 der im Netz genommene Pfad aus Knoten (s) nach (d) und  $\Delta L_{d,s}(\Delta\tau)$  der in  $\Delta\tau$  genommene Wegefortschritt längs dieses Pfades. n-fache Vervielfachung des Wegefortschritts bewirkt  $\Delta L_{d,s}(\Delta\tau) \rightarrow n \cdot \Delta L_{d,s}(\Delta\tau)$ , darin inbegriffen  $\Delta S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau) \rightarrow n \cdot S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau)$  längs  $P_{\leftarrow d,s}$  bei Diskriminierung  $S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau) \leq S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau)$ . Es bezeichnet  ${}^{[n]}\gamma_{d,s}$  die *dezidierte Restzeitrate* beim Wegefortschritt in  $\Delta\tau$  von  $n \cdot \Delta L_{d,s}(\Delta\tau)$  nach (d) aus (s) und  ${}^{[n]}\gamma_d = \sum_{(s)} {}^{[n]}\gamma_{d,s}$  die *globale Restzeitrate* (6.1) beim Wegefortschritt in  $\Delta\tau$  von  $n \cdot \Delta L_{d,s}(\Delta\tau)$  nach (d) aus alle (s).

$$^{[n]}\gamma_d = \sum_{(s)} ^{[n]}\gamma_{d,s} = \sum_{(s)} \left( \sum_{\substack{\mathbf{p} \\ \leftarrow d,s}} \left[ 1 - \frac{n \cdot \Delta S_{v\uparrow 1,v}(\Delta\tau)}{S_{v\uparrow 1,v}} \right] \right) \quad (6.1)$$

Entsprechend (4.8) bestimmt der Wegefortschritt  $\Delta$  eines Korpuskelflusses längs eines auf einen Verkehrsknoten gerichteten Pfades  $\mathbf{P}$ , formuliert über das metrische Kalkül  $\kappa$ , den Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung eines Korpuskelflusses auf diesen Knoten.

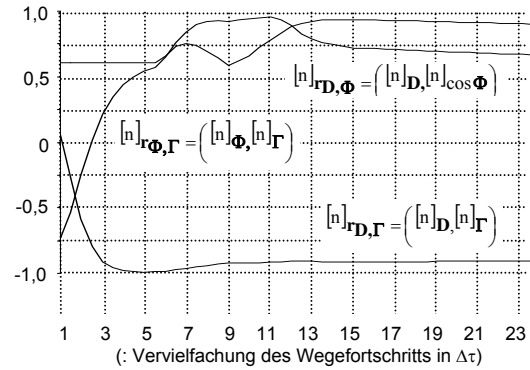


**Fig. 6.2** Änderung der Parameter Durchlässigkeit  $D$  und Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung bei  $n$ -facher Zunahme des Wegfortschritts  $\Delta L$  in  $\Delta\tau (=1s)$ , diskriminiert in  $\Delta L \leq L$  aus  $\Delta S \leq S$  unter  $(0)_a=1$

Das metrische Kalkül  $\kappa$  relativiert den Wegfortschritt  $\Delta$  eines Korpuskelflusses auf einen Verkehrsknoten. Auf den Korpuskelfluss wirkt entsprechend dem genommenen Wegfortschritt  $\Delta$  ein Richtungszwang, bemessen durch den Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung (4.8). Andererseits bestimmt das metrische Kalkül  $\kappa$  die Restzeitrate  $\gamma$  beim Korpuskelfluss auf den Knoten. Dementsprechend besteht ein Zusammenhang zwischen Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung und der Restzeitrate  $\gamma$ .

**Fig. 6.3** zeigt den Verlauf ausgewählter Korrelationen  $r$  zwischen

$$\begin{aligned} [n]\Gamma &= \{[n]\gamma_i \mid i=0,\dots,4\} & \{&: \text{globale Restzeitrate}\} \\ [n]\Phi &= \{[n]\phi_i \mid i=0,\dots,4\} & \{&: \text{Winkel der Fehlabweichung}\} \\ [n]\cos\Phi &= \{[n]\cos\phi_i \mid i=0,\dots,4\} & \text{und} \\ [n]D &= \{[n]D_i \mid i=0,\dots,4\} & \{&: \text{Diffusionskoeffizient}\} \end{aligned}$$



**Fig. 6.3** Entwicklung der Korrelation  $r$  zwischen Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung, Diffusionskoeffizient  $D$  globaler Restzeitrate  $\gamma$  bei  $n$ -facher Zunahme des Wegfortschritts  $\Delta L$  in  $\Delta\tau (=1s)$ , diskriminiert durch  $\Delta S \leq S$  unter  $(0)_a=1$  mit

$$\begin{aligned} [n]\Gamma &= \{[n]\gamma_i \mid i=0,\dots,4\} & \{&: \text{globale Restzeitrate}\} \\ [n]\Phi &= \{[n]\phi_i \mid i=0,\dots,4\} & \{&: \text{Winkel der Fehlabweichung}\} \\ [n]\cos\Phi &= \{[n]\cos\phi_i \mid i=0,\dots,4\} & \text{und} \\ [n]D &= \{[n]D_i \mid i=0,\dots,4\} & \{&: \text{Diffusionskoeffizient}\} \end{aligned}$$

Für wachsende Vielfachheit  $n$  der Wegfortschritte in  $\Delta\tau$  konvergieren die Korrelationen  $[n]r_{\Phi,\Gamma} = ([n]\Phi, [n]\Gamma)$  und  $[n]r_{D,\cos\Phi} = ([n]D, \cos[n]\Phi)$  gegen +1 und die Korrelation  $[n]r_{D,\Gamma} = ([n]D, [n]\Gamma)$  gegen -1 (Fig. 6.3). Somit besteht zwischen allen 3 Größen (Winkel  $\phi$  der Fehlabweichung, Diffusionskoeffizient  $D$  und globale Restzeitrate  $\gamma$ ) ein Zusammenhang; alle drei Größen bedingen sich einander. Demnach lassen sich sowohl der Winkel der Fehlabweichung  $\phi$  als auch der Diffusionskoeffizient  $D$  durch Zeitmessungen der Korpuskelflüsse im Verkehrsfeld bestimmen. Einen solchen Zusammenhang herauszustellen war Ziel des Beitrages über die vektoranalytische Beschreibung eines diskret Massiven Systems.

## Literatur

- [BM 89] H. Burkhart, R. Millen: **Performance Measurement Tools in a Multiprocessor Environment.** IEEE\_ToC 38 (1989) 05
- [EK 06] Erricos J. Kontoghiorghe: **Handbook of Parallel Computing and Statistics.** CRC Press Computers, 2006. ISBN 082474067X
- [QU 04] Michael J Quinn: **Parallel Programming.** Mc Graw Hill, Boston, 2004
- [BGZ 82] O. Beyer, H.-J. Girlich, U. Zschiesche: **Stochastische Prozesse und Modelle.** BSB B.G.TEUBER VERLAGSGESELLSCHAFT 1982
- [WS 05] Gerhard Wunsch, Helmut Schreiber: **Stochastische Systeme** Springer, 2005. ISBN 354029225X
- [SC 03] Rainer W. Schulze: **Neuronale Topologiesynthese für Massiv Parallele Systeme.** PETER LANG, Europäischer Verlag der Wissenschaften, 2003. ISBN 3-631-50713-5
- [PH 05] D.A. Patterson, J.L. Hennessy : **Computer Organization and Design, the hardware/software interface.** Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2005
- [WU 73] Gerhard Wunsch: **Feldtheorie.** Verlag Technik, 1973
- [PT 02] Giuseppe. Da Prato, Luciano Tubaro. **Stochastic Partial Differential Equations and Applications** CRC Press, Mathematics, 2002. ISBN 0824707923  
 darin: Franco Flandoli: Stochastic Problems in Fluid Dynamics. S. 209-234  
 Istvan Gyöngy: Approximations of Stochastic partial Differential Equations. S.287-308
- [PG 97] E.M. Petriu, A. Guergachi, G.G. Patry, L. Zhao, D.C. Petriu, G. Vukovich: **Artificial neural architecture for real time modelling applications.** Algorithms and Architectures for Parallel Processing, 1997, ICAPP 97
- [KR 95] Nikolai Vladimirovich Krylov: **Introduction to the Theory of Diffusion Processes** American Mathematical Society, 1995. ISBN 0821846000  
 darin: \$9: Probabilistic solutions of partial differential equations, Seite 228 ff
- [CX 06] Baoxing Chen, Wenjun Xiao, Behrooz Parhami: **Internode Distance and Optimal Routing in a Class of Alternating Group Networks** IEEE\_ToC 55 (2006) 12
- [HR 06] Narender Hanchate, Nagarajan Ranganathan: **Simultaneous Interconnect Delay and Crosstalk Noise Optimization through Gate Sizing Using Game Theory.** IEEE\_ToC 55 (2006) 08